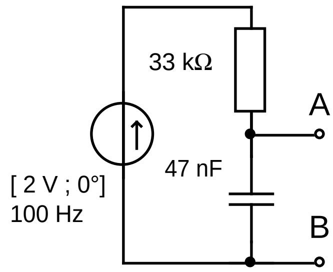
A12CA-1- Soit un circuit RL série, avec R = 20 Ω ; L = 70 mH. Calculer les tensions $\underline{V_R}$ (tension aux bornes de R), $\underline{V_L}$ (tension aux bornes de L), $\underline{V_{RL}}$ (tension totale aux bornes du circuit RL), pour :
a) $i(t) = 3 \sin(2\pi 50t)$; b) $i(t) = 3 \sin(2\pi 500t)$

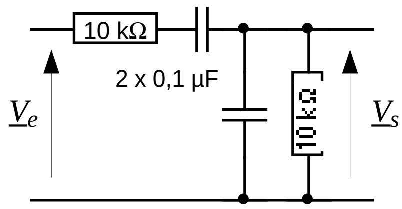
A12CA-2- Calculer le courant qui circule dans un circuit RC série, alimenté en 230 V efficaces, 50 Hz, avec : R = 47 kΩ ; C = 22 nF .

A12CA-3- Un dipôle série constitué d'une résistance et d'une réactance est soumis à une tension $u(t) = 20 \sin(2\pi 50t)$. Il est parcouru par un courant d'amplitude 58 mA déphasé de +25° par rapport à u. Préciser la nature et la valeur des composants qui le constituent.

A12CA-4- Calculer la tension vue entre les points A et B :

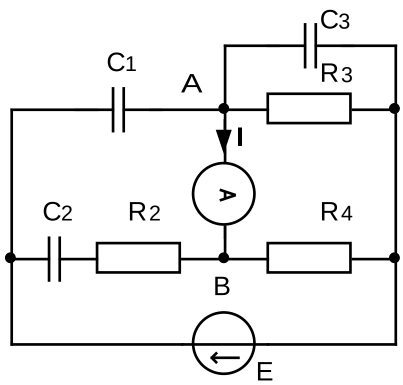


A12CA-5- En appliquant la règle du pont diviseur de tension, montrer que la tension de sortie est en phase avec la tension d'entrée pour une certaine fréquence que l'on calculera :

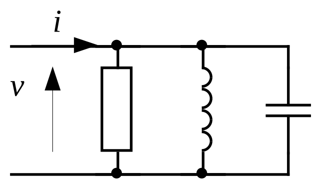


A12CA-6- Un bobinage de moteur asynchrone monophasé est équivalent à un circuit RL série avec R = 120 Ω ; L = 0,1 H ; f = 50 Hz. On connecte en série un condensateur C. Soit $\underline{V}$ la tension aux bornes du circuit RL, et $\underline{U}$ la tension totale (aux bornes du circuit RLC). Calculer C pour que la tension $\underline{V}$ soit en quadrature par rapport à $\underline{U}$.

A12CA-7- On considère le pont d'impédances suivant :
a) Calculer R_2 et C_2 sachant que le pont est équilibré pour f = 48 Hz, R_3 = 4260 Ω, C_3 = 1,96 nF, R_4 = 1 kΩ, C_1 = 50 pF.
b) C_2, R_2 est un capteur capacitif d'humidité constitué de disques de 20mm de diamètre séparés par un diélectrique d'épaisseur e = 3mm. Calculer la constante diélectrique relative ε_r sachant que $C = \varepsilon_0 \varepsilon_r \dfrac{S}{e}$



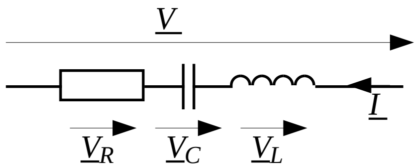
A12CA-8- Soit $\underline{Z}$ l'impédance totale du circuit :
Soit R = 4,7 kΩ , L = 10 mH ; C = 0,1 µF.
a) Que vaut l'impédance Z lorsque v est une tension continue ?
b) Que vaut l'impédance Z lorsque v est une tension sinusoïdale pure dont la fréquence tend vers l'infini ?



c) En f = 3000 Hz puis f = 8000 Hz calculer la pulsation ω, et l'impédance $\underline{Z}$.
d) Calculer la fréquence f_0 pour laquelle $\underline{Z}$ est purement résistive.
e) Indiquer sur papier libre, en échelle linéaire, l'allure de la fonction $|\underline{Z}(f)|$.
f) Pour $f < f_0$, ce circuit est-il inductif ou capacitif ? Pourquoi ?

ISBN 978-2-9520781-1-5

A12CA-9-



a) Donner l'expression complexe des tensions $\underline{V}_R$, $\underline{V}_L$, $\underline{V}_C$ en fonction de l'intensité du courant $\underline{I}$ et des composants *(R, L, C)*.

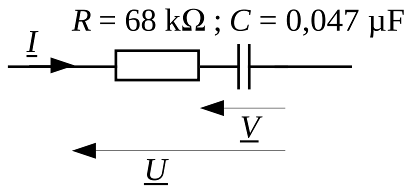
b) Exprimer le rapport $\underline{I}$ / $\underline{V}$. Que représente-t-il ?

c) En déduire le module de $\underline{I}$ en fonction de *R, L, C,* ω, *V*.

d) Quelle est la valeur ω_0 de la pulsation de résonance série conduisant à une intensité du courant maximale ? En déduire la valeur numérique de la fréquence de résonance f_0.

e) Donner l'expression de la puissance active *P* dissipée par effet Joule dans la résistance *R* en fonction de *R, L, C,* ω, *V*.

A12CA-10-



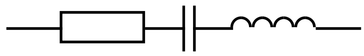
La tension $u(t)$ appliquée aux bornes du dipôle RC ci-contre est : $u(t) = 10\sqrt{2}\sin(2\pi ft)$.

a) Etablir les expressions littérales du module et de l'argument de l'impédance $\underline{Z}$ de ce dipôle en fonction de la fréquence *f*. A.N. : calculer $|\underline{Z}|$ et arg($\underline{Z}$).

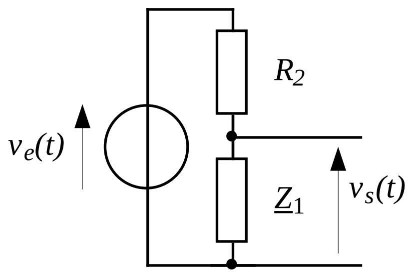
b) Calculer la valeur efficace et la phase du courant $i(t)$ qui le traverse.

c) Calculer la valeur efficace et la phase de la tension $v(t)$ mesurée aux bornes du condensateur.

d) Calculer la valeur de l'inductance qu'il faudrait ajouter en série avec ce dipôle pour obtenir une impédance totale purement réelle :



A12CA-11-



1°) Calculer l'impédance d'un condensateur de 100 µF pour une fréquence f = 160 Hz.

2°) Même question pour une inductance de 10 mH

3°) Le pont diviseur de tension est à vide.

On donne : R_2 = 10 Ω ; $v_e(t) = 230\sqrt{2}\sin(2\pi 160t)$

a) Calculer $v_s(t)$ si $\underline{Z}_1$ est une résistance de valeur 24 Ω.

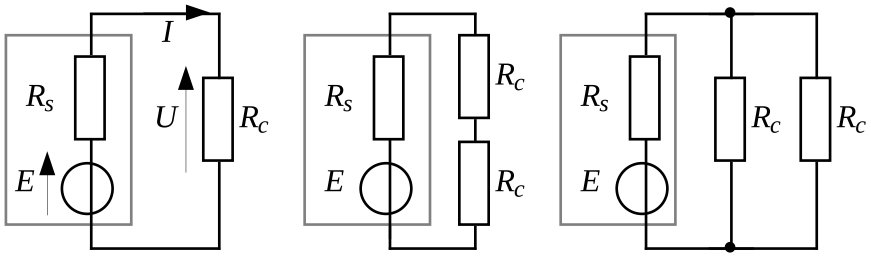
b) Même question si $\underline{Z}_1$ est un condensateur de valeur 100 µF

c) Même question si $\underline{Z}_1$ est une inductance de valeur 10 mH

ISBN 978-2-9520781-1-5

A12CA-12- Charge d'un amplificateur : on dispose d'un amplificateur stéréophonique de puissance nominale 100W par canal. Chaque enceinte acoustique présente une impédance nominale de 8Ω. Pour améliorer la répartition du son dans le volume d'écoute, on veut ajouter une enceinte de même caractéristique par canal. Comment faut-il brancher celle-ci ?

a) Pour modéliser cette question, on considère un générateur [E, R_s] qui se compose d'une source de fem continue E et d'une impédance interne R_s = 8Ω. Il débite dans une charge R_c = 8Ω une puissance P_u = 100W. Calculer E, P_F (puissance fournie par la source idéale E) ainsi que le rendement du système $\eta = \dfrac{P_u}{P_F}$.



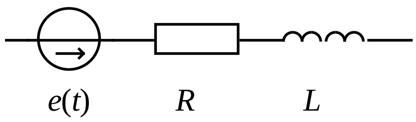
On alimente maintenant deux charges R_c identiques (8Ω) avec le même générateur [E, R_s]. Calculer P_u, P_F et η dans les deux cas suivants :

b) les deux charges sont connectées en série ; **c)** les deux charges sont connectées en parallèle.

d) Conclusion : quel branchement choisir pour optimiser l'utilisation du générateur ?

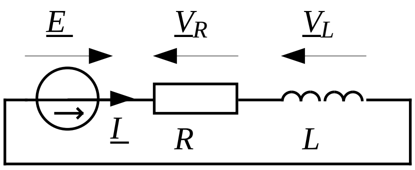
A12CA-13- Adaptation d'impédance sur un capteur inductif

a) Un capteur inductif est assimilable à un générateur de fem interne $e(t) = E\sqrt{2}\sin\omega t$, où E = 35 mV, fréquence f = 10 kHz, en série avec une impédance interne $\underline{Z} = R + jL\omega$. La résistance R vaut 180 Ω et le module de son impédance vaut $|\underline{Z}|$ = 1500 Ω à 10 kHz. Calculer L.



b) On pose : $\varphi = \arg \underline{Z}$. Calculer φ

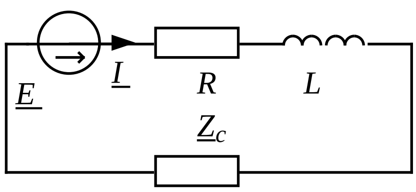
c) On considère le cas où le capteur est branché en court-circuit. Soit $i(t)$ le courant débité. Etablir l'expression littérale de $i(t)$ en fonction de E, R, L, ω, φ. A.N. : calculer I_{eff}.



d) En déduire la puissance active dissipée dans le capteur.

Le capteur est maintenant branché sur une charge $\underline{Z_c}$. On pose : $\underline{Z_c} = r + jX$.

e) Etablir l'expression littérale de la valeur efficace du courant débité I_{eff} en fonction de E, R, r, L, X, ω.



f) En déduire l'expression de la puissance active P_u transmise à la charge.

g) Monter que cette puissance est maximale pour une certaine valeur de l'impédance de charge $\underline{Z_{co}}$ dont on précisera les éléments r_o et X_o en fonction de r, L et ω.

h) Quelle est la nature de cette charge ? Préciser la valeur numérique de ses éléments à f = 10 kHz.

i) A.N. : calculer dans ces conditions I_{eff} et la puissance transmise P_u .

REPONSES

A12CA-1-

a) $f = 50$ Hz $\Rightarrow L\omega = 22\Omega$

$\underline{V}_R = R\underline{I} = 20 \,.\, [3\,;\,0°] = [60\text{ V};\,0°]$

$\underline{V}_L = \mathrm{j}L\omega\underline{I} = [22\,;\,90°].[3\,;\,0°] = [66\text{ V};\,90°]$

$\underline{V}_{RL} = (R+\mathrm{j}L\omega)\underline{I} = [89{,}2\text{ V}\,;\,47{,}7°]$

b) $f = 500$ Hz $\Rightarrow L\omega = 220\Omega$

$\underline{V}_R = 20 \,.\, [3\,;\,0°] = [60\text{ V};\,0°]$

$\underline{V}_L = [220\,;\,90°].[3\,;\,0°] = [660\text{ V};\,90°]$

$\underline{V}_{RL} = [663\text{ V};\,84{,}8°]$

A12CA-2-

$1/C\omega = 1/\,22.10^{-9}2\pi50 = 144{,}7\text{ k}\Omega \Rightarrow \underline{I} = 230\sqrt{2}\,/\,(47 - \mathrm{j}\,144{,}7)10^{3} = [2{,}14\text{ mA}\,;\,72°]$

A12CA-3-

$\underline{Z} = [20\,;\,0°]\,/\,[58.10^{-3}\,;\,25°] = (313 - \mathrm{j}\,146)\Omega = R + 1/\mathrm{j}C\omega$

avec $R = 313\ \Omega$ et $C = 21{,}8\ \mu$F (réactance < 0 $\Rightarrow$ dipôle RC)

A12CA-4-

$1/C\omega = 1/\,47.10^{-9}2\pi100 = 33{,}9\text{ k}\Omega$

$\underline{U}_0 = [2\,;\,0°].(1/\mathrm{j}C\omega)/\,(R + 1/\mathrm{j}C\omega) = 2\,/\,(1 + \mathrm{j}RC\omega) = [1{,}43\text{ V}\,;\,-44{,}3°]$

A12CA-5-

Soient R et C les éléments composant ce circuit (un RC série et un RC //) :

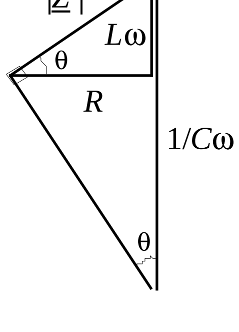
$$\frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e} = \frac{\dfrac{1}{\dfrac{1}{R}+\mathrm{j}C\omega}}{R+\dfrac{1}{\mathrm{j}C\omega}+\dfrac{1}{\dfrac{1}{R}+\mathrm{j}C\omega}} = \frac{1}{3+\mathrm{j}RC\omega+\dfrac{1}{\mathrm{j}RC\omega}} = \frac{\mathrm{j}RC\omega}{1+3\mathrm{j}RC\omega+(\mathrm{j}RC\omega)^2} = \frac{\mathrm{j}RC\omega}{1-(RC\omega)^2+3\mathrm{j}RC\omega}$$

On remarque que, lorsque $RC\omega = 1$, la quantité $\dfrac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e} = \dfrac{1}{3}$ est un nombre réel, donc de phase nulle. Ce qui correspond à la fréquence : $f_0 = \dfrac{1}{2\pi RC} = 159$ Hz

A12CA-6-

Le moteur forme avec le condensateur un circuit RLC série. Les tensions étant proportionnelles aux impédances, il vient :

$$\left.\begin{array}{l}\text{grand triangle : } \sin\theta = \dfrac{|\underline{Z}|}{\dfrac{1}{C\omega}} = |\underline{Z}|C\omega \\ \text{petit triangle : } \sin\theta = \dfrac{L\omega}{|\underline{Z}|}\end{array}\right\} \Rightarrow C = \frac{L}{L^2\omega^2+R^2} = 6{,}5\mu\text{F}$$



A12CA-7-

a) $\underline{E}_{AB} = \underline{E}.\dfrac{\underline{Z}_3\underline{Z}_2-\underline{Z}_4\underline{Z}_1}{(\underline{Z}_1+\underline{Z}_3)(\underline{Z}_2+\underline{Z}_4)}$ $\quad \underline{Z}_{AB} = \dfrac{\underline{Z}_1\underline{Z}_3}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_3}+\dfrac{\underline{Z}_2\underline{Z}_4}{\underline{Z}_2+\underline{Z}_4}$

ISBN 978-2-9520781-1-5

Le pont est équilibré si : $\underline{I} = 0$ pour $\underline{Z}_3\,\underline{Z}_2 = \underline{Z}_4\,\underline{Z}_1$

$$\Rightarrow \frac{R_3}{1+jR_3C_3\omega}.\left(R_2+\frac{1}{jC_2\omega}\right)=\frac{R_4}{jC_1\omega}$$

$$\Rightarrow R_2 = R_4\frac{C_3}{C_1}\ ;\ C_2=\frac{R_3}{R_4}C_1$$

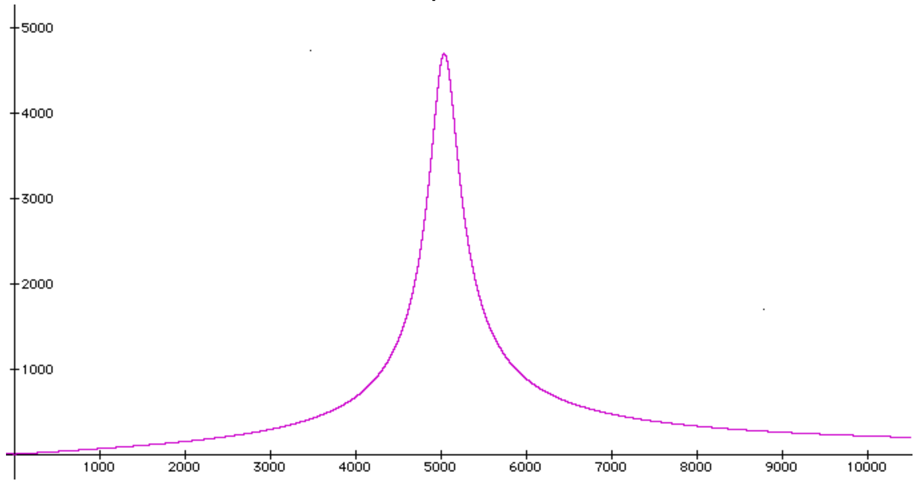
$\Rightarrow$ R_2 = 39,2 kΩ ; C_2 = 213 pF ;

b) $\varepsilon_r = \dfrac{eC}{\varepsilon_0\pi r^2} \Rightarrow \varepsilon_r = 230$

A12CA-8-

a) et **b)** $Z = 0$

e) $\underline{Z}=\dfrac{1}{\dfrac{1}{R}+\dfrac{1}{jL\omega}+jC\omega} \Rightarrow |\underline{Z}| = \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{R^2}+\left(C\omega-\dfrac{1}{L\omega}\right)^2}}$ et $\varphi = -\arctan R\left(C\omega-\dfrac{1}{L\omega}\right)$



c) f = 3000 Hz $\Rightarrow$ ω = 18850 rad/s et $C\omega-\dfrac{1}{L\omega}$ = -0,00342 S $\Rightarrow$ $|\underline{Z}|$ = 292 Ω ; φ = 86,4°

f = 8000 Hz $\Rightarrow$ ω = 50265 rad/s et $C\omega-\dfrac{1}{L\omega}$ = 0,00304 S $\Rightarrow$ $|\underline{Z}|$ = 328 Ω ; φ = - 86°

d) $f_0 = 1/2\pi\sqrt{LC}$ = 5032 Hz

f) Circuit inductif car φ > 0

A12CA-9-

a) $\underline{V}_R = R.\underline{I}\ ;\ \underline{V}_C=\dfrac{1}{jC\omega}.\underline{I}\ ;\ \underline{V}_L = jL\omega.\underline{I}$

b) $\underline{Y}=\dfrac{\underline{I}}{\underline{V}}=\dfrac{1}{R+j\left(L\omega-\dfrac{1}{C\omega}\right)}$: admittance ; **c)** $I=\dfrac{V}{\sqrt{R^2+\left(L\omega-\dfrac{1}{C\omega}\right)^2}}$

d) $Z=\sqrt{R^2+\left(L\omega-\dfrac{1}{C\omega}\right)^2}$ est minimale pour $L\omega-\dfrac{1}{C\omega}=0 \Leftrightarrow \omega_0=\dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ = 129,1 krad/s $\Rightarrow$ f_0 = 20,5 kHz

ISBN 978-2-9520781-1-5

e) $p = R.I^2 = \dfrac{RC^2\omega^2V^2}{\left(1 - LC\omega^2\right)^2 + (RC\omega)^2}$

A12CA-10-

a) $\underline{Z} = R - \mathrm{j}\dfrac{1}{\mathrm{C}\omega} \Rightarrow |\underline{Z}| = \sqrt{R^2 + \dfrac{1}{(C2\pi f)^2}} \approx 76$ kΩ ; $\arg(\underline{Z}) = -\arctan\dfrac{1}{RC2\pi f} \approx -26{,}5° = -0{,}46$ rad

b) $I_{\text{eff}} = \dfrac{10}{76.10^3} \approx 132$ µA ; $\arg(\underline{I}) = 0 - \arg(\underline{Z}) = 26{,}5°$

c) $\underline{V} = -\mathrm{j}\dfrac{\underline{I}}{C\omega} \Rightarrow V_{\text{eff}} = \dfrac{132.10^{-6}}{47.10^{-9}.2.\pi.100} \approx 4{,}45$ V ;
$\arg(\underline{V}) = \arg(\underline{I}) - 90° \approx -63{,}5° = -1{,}1$ rad

d) Il faut : $LC\omega^2 = 1 \Rightarrow L \approx 54$ H !

A12CA-11-

3a) $v_s = \dfrac{R_1}{R_1 + R_2}v_e \Rightarrow v_s = 162\sqrt{2}\sin(2\pi 160 t)$

3b) et c)

R2 [Ω] =	10	C [F] =	0,0001	f [Hz] =	**160**
	partie réelle	partie imaginair	module	argument	
Zc [Ω] =	0	-9,9	9,9	-90	
Zc + R2 =	10	-9,9	14,1	-45	
Zc / (Zc + R2) =			0,71	-45	
Ve [V eff] =			230	0	
Vs [V eff] =			162	-45	

$v_s = 162\sqrt{2}\sin(2\pi 160 t - 45°)$

R2 [Ω] =	10	L [H] =	0,01	f [Hz] =	**160**
	partie réelle	partie imaginair	module	argument	
ZL [Ω] =	0	10,1	10,1	90	
ZL + R2 =	10	10,1	14,2	45	
ZL / (ZL + R2) =			0,71	45	
Ve [V eff] =			230	0	
Vs [V eff] =			163	45	

$v_s = 162\sqrt{2}\sin(2\pi 160 t + 45°)$

ISBN 978-2-9520781-1-5

A12CA-12- Charge d'un amplificateur :

a) *Charge unique :* soit I le courant débité par le générateur et U la tension aux bornes de la charge :

$$P_u = R_c.I^2 \Rightarrow I = \sqrt{\frac{P_u}{R_c}} = \sqrt{\frac{100}{8}} \approx 3,54\,\text{A} \Rightarrow E = (R_s + R_c).I = 16.3,54 \approx 56,6\text{ V}$$

La puissance fournie par la source vaut donc : $P_F = E.I = 3,54.56,6 = 200$ W

Et le rendement : $\eta = \frac{P_u}{P_F} = 50\%$

b) Charges en série : charge totale = $2R_c$ = 16 Ω. On calcule : $I = \frac{E}{R_s + R_c} = \frac{56,6}{8+16} \approx 2,36$ A

$$\left.\begin{array}{l} P_u = R_c.I^2 = 16.2,36^2 \approx 89\text{ W} \\ P_F = E.I = 56,6.2,36 \approx 133\text{ W} \end{array}\right\} \Rightarrow \eta = \frac{P_u}{P_F} = \frac{89}{133} \approx 67\%$$

c) Charges en parallèle : charge totale = $R_c/2$ = 4 Ω. On calcule : $I = \frac{E}{R_s + R_c} = \frac{56,6}{8+4} \approx 4,72$ A

$$\left.\begin{array}{l} P_u = R_c.I^2 = 4.4,72^2 \approx 89\text{ W} \\ P_F = E.I = 56,6.4,72 \approx 267\text{ W} \end{array}\right\} \Rightarrow \eta = \frac{P_u}{P_F} = \frac{89}{267} \approx 33\%$$

$I = \frac{E}{R_c + R_s}$ et $U = E\,\frac{R_c}{R_c + R_s}$ (pont diviseur de tension) $\Rightarrow P_u = U.I = E^2\,\frac{R_c}{(R_c + R_s)^2}$

$\Rightarrow E = (R_c + R_s)\sqrt{\frac{P_u}{R_c}} \approx 56,6$ V . Comme $R_s = R_c$, $P_F = P_u$ et $\eta = 50\%$.

d) Le cas a) est le cas nominal. Le cas b) est intéressant, car il allie une puissance utile encore confortable (90W) à un rendement acceptable (près de 70%). Le cas c) est à rejeter, car il impose un échauffement excessif du générateur (près de 180W à dissiper).

A12CA-13- Adaptation d'impédance sur un capteur inductif

a) $|\underline{Z}|^2 = R^2 + L^2\omega^2 \Rightarrow L = \frac{\sqrt{|\underline{Z}|^2 - R^2}}{2\pi f} = \frac{\sqrt{1500^2 - 180^2}}{2\pi 10000} \approx 23,7$ mH

b) $\cos\varphi = \frac{R}{|\underline{Z}|} = 0,12 \Rightarrow \varphi \approx 83°$

c) $\underline{E} = \underline{Z}\,\underline{I} \Rightarrow i(t) = \frac{E\sqrt{2}}{|\underline{Z}|}\sin(\omega t - \varphi) \Rightarrow I_{\text{eff}} = \frac{35.10^{-3}}{1500} \approx 23,3\ \mu$A

d) $P_a = R.I_{\text{eff}}^2 \approx 0,1\ \mu$W

e) $I_{\text{eff}} = \frac{E}{\sqrt{(R+r)^2 + (L\omega + X)^2}}$

f) $P_u = r.I_{\text{eff}}^2 = \frac{r}{(R+r)^2 + (L\omega + X)^2}E^2$

g) Pour que cette puissance soit maximale, il faut que le dénominateur soit minimal, donc que :
1°) $L\omega + X = 0 \Rightarrow X = -L\omega \Leftrightarrow$ cette réactance négative doit être celle d'un condensateur puisque :
- l'impédance d'une bobine est $\underline{Z_L} = jL\omega = jX_L$ (donc $X_L > 0$)

ISBN 978-2-9520781-1-5

- l'impédance d'un condensateur est $\underline{Z}_C = \dfrac{1}{jC\omega} = -\dfrac{j}{C\omega} = jX_C$ (donc $X_C < 0$)

D'où : $-\dfrac{1}{C\omega} = -L\omega \Rightarrow C_0 = \dfrac{1}{L(2\pi f)^2}$

On en déduit : $P_u = \dfrac{r}{(R+r)^2}E^2$.

2°) Cette dernière expression admet un extremum si sa dérivée est nulle. En dérivant P_u par rapport à r, il vient :

$$P_u = \frac{r}{R^2+2Rr+r^2}E^2 \Rightarrow \frac{dP_u}{dr} = \frac{R^2+2Rr+r^2-r(2R+2r)}{D^2}E^2 = \frac{R^2-r^2}{D^2}E^2 = 0 \quad pour \quad r_0 = R$$

En admettant que cet extremum est un maximum, la puissance P_u est donc maximale pour : $r_0 = R$.

h) Cette charge est capacitive. On trouve (pour f = 10 kHz) : $C_0 \approx$ 10 nF et r_0 = 180 Ω

i) $I_{\text{eff}} = \dfrac{E}{R+r_0} = \dfrac{35.10^{-3}}{2.180} \approx$ 100 µA et $r = R \Rightarrow P_u = \dfrac{E^2}{4R} \approx$ 1,7 µW.

ISBN 978-2-9520781-1-5