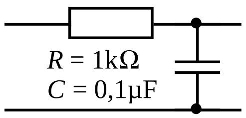
# CONSTRUCTION D'UNE ÉCHELLE LOG-LOG - APPLICATION AU PLAN DE BODE

*Matériel nécessaire : papier millimétré linéaire ou grapheur (échelle lin-lin).* ***L'unité en x et y est le cm.***

On veut représenter graphiquement le module de la fonction de transfert $\underline{T}(f)$ du filtre RC ci-dessous ($F_0$ = fréquence de doupure) :




$$T = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{f}{F_0}\right)^2}}$$

avec $T = 1/\sqrt{2}$ pour :

$$F_0 = \frac{1}{2\pi RC} \approx 1{,}6 \text{ kHz}$$

Remplir la colonne [B] du tableau [I].

**1) Courbe [1].** On veut tracer le graphe $y = T(x)$ sur papier millimétré linéaire ($x$ en abscisse étant la variable, exprimée en cm, représentant sur ce papier la fréquence $f$ ).

Axes des abscisses :

Origine : $x = 0$ pour $F_1 = 0$ Hz

Échelle : $L_1 = 1$ cm pour $\Delta f = 1$ kHz

Quelle est la relation entre $x$ et $L_1$, $f$ et $\Delta f$ ?

Graduer l'axe des abscisses en $x$ (au dessus) et en $f$ (au dessous).

Axes des ordonnées :

Origine : $y = 0$ pour $T = 0$

Échelle : $y = L'_1 = 10$ cm pour $T = 1$

Compléter les colonnes [D] et [C] du tableau [I].

Exprimer $y$ en fonction de $L'_1$, $x$, $L_1$, $\Delta f$ et $F_0$ *(cette relation est la fonction réellement tracée sur la feuille de papier millimétré).*

Tracer le graphe $y(x)$. Marquer *(en rouge)* sur ce graphe les points calculés dans le tableau I (abscisses : col. D ; ordonnées : col. C). Placer le point correspondant à $F_0$.

**2) Courbe [2].** On veut, sur papier millimétré linéaire, construire une échelle logarithmique selon l'axe des abscisses. Pour cela, on fait le changement de variable :

$$x = L_2 \log \frac{f}{F_2}$$

Axe des abscisses :

Origine : $x = 0$ pour $F_2 = 1$ Hz

Échelle : $L_2 = 1$ cm pour $\Delta(\log f) = 1$

A quel rapport de fréquence $r = f_B/f_A$ correspond la longueur $L_2$ ?

Graduer l'axe des abscisses en $x$ (au dessus) et en $f$ (au dessous).

Axe des ordonnées : sans changement.

Compléter la colonne [E] du tableau [I].

Exprimer $y$ en fonction de $L'_1$, $x$, $L_2$ et $F_0$.

Tracer le graphe $y(x)$. Marquer (en rouge) sur ce graphe les points calculés dans le tableau I (abscisses : col. E ; ordonnées : col. C). Placer le point correspondant à $F_0$.

**3) Courbe [3].** Quel est le défaut de la courbe [2] ? Pour y remédier on modifie celle-ci de la façon suivante :

**3-1)** Axe des abscisses :

Origine : $x_3 = 0$ pour $F_3 = 100$ Hz

Échelle : $L_3$ =10 cm pour $\Delta(\log f)= 1$

Quelle est la relation entre $x$ et $L_3$, $F_3$ et $f$ ?

Compléter la colonne [F] du tableau [I].

Graduer l'axe des abscisses en $x$ (au dessus) et en $f$ (au dessous).

Axe des ordonnées : sans changement.

Exprimer $y$ en fonction de $L'_1$, $x$, $L_3$, $F_3$ et $F_0$.

ISBN 978-2-9520781-1-5  

Tracer le graphe $y(x)$. Marquer (en rouge) sur ce graphe les points calculés dans le tableau I (abscisses : col. F ; ordonnées : col. C). Placer le point correspondant à $F_0$.

**3-2)** Quel est le défaut que présente l'ensemble des points marqués en rouge ? Pour y remédier, on veut des points équidistants d'un intervale corespondant à un doublement de fréquence ($r = 2$, soit une octave).

Quelle sera alors la distance en mm entre deux points ?

Compléter le tableau [II], colonnes [A] et [E], pour :

$100 \leq f \leq 20000$ Hz

Placer les points correspondants *(en bleu)* sur la courbe [3].

**4) Courbe [4].**

Axe des abscisses : sans changement.

Axe des ordonnées : on veut que cet axe ait aussi une échelle logarithmique. On considère la fonction $y = \log[T(x)]$.

Origine : $y = 0$ pour $T = 1$

Échelle : $L'_2 = 1$ cm pour $\Delta\log[T(x)] = \Delta y = 1$

Exprimer $y$ en fonction de $L'_2$, $x$, $L_3$, $F_3$ et $F_0$.

Compléter le tableau [II], colonnes [B] et [C]

Tracer le graphe $y(x)$. Marquer *(en bleu)* sur ce graphe les points calculés dans le tableau II (abscisses : colonne E ; ordonnées : colonne C). Placer le point correspondant à $F_0$.

**5) Courbe [5].**

Quel est le défaut de la courbe [4] ? Pour y remédier on modifie l'échelle des ordonnées. Dans la pratique, on utilise le gain $G$ de la fonction de transfert, exprimé en décibels par : $G = 20\log T$.

Axe des ordonnées :

origine : $y = 0$ pour $G = 0$

échelle : $L'_3 = 10$ cm pour $\Delta G = 20$

Compléter la colonne [D] du tableau [II].

Exprimer $y$ en fonction de $L'_3$, $x$, $L_3$, $F_3$ et $F_0$.

Tracer le graphe $y(x)$. Marquer en bleu les points calculés.

**Tableau I**

| A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|
| f [Hz] | T | y [cm] | x [cm] | x [cm] | x [cm] |
| 0 | | | | | |
| 100 | | | | | |
| 1000 | | | | | |
| 2000 | | | | | |
| 4000 | | | | | |
| 6000 | | | | | |
| 8000 | | | | | |
| 10000 | | | | | |
| 12000 | | | | | |
| 14000 | | | | | |
| 16000 | | | | | |
| 18000 | | | | | |
| 20000 | | | | | |

**Tableau II**

| A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|
| f [Hz] | T | y [cm] | G [dB] | x [cm] |
| 100 | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |

ISBN 978-2-9520781-1-5

**REPONSES**

## 1) Courbe [1]

$$x_{[cm]} = f_{[Hz]}\,\frac{L_1}{\Delta f} \Leftrightarrow f = \frac{\Delta f}{L_1}.x$$

$$T = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{f}{F_0}\right)^2}} \Rightarrow y = \frac{L'_1}{\sqrt{1+\left(\frac{\Delta f}{F_0}\frac{x}{L_1}\right)^2}}$$

A.N. : $\Delta f = 1$ kHz ; $F_0 = 1{,}6$ kHz ; $L_1 = 1$ cm ; $L'_1 = 10$ cm

$$y = \frac{10}{\sqrt{1+0{,}395.x^2}}$$

## 2) Courbe [2]

$\Delta(\log f) = \log f_B - \log f_A = \log\frac{f_B}{f_A} = \log r = 1 \Rightarrow r = 10$, soit une décade.

$$x = L_2 \log\frac{f}{F_2} \Rightarrow f = F_2.10^{x/L_2}$$

$$T = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{f}{F_0}\right)^2}} \Rightarrow y = \frac{L'_1}{\sqrt{1+\left(\frac{F_2}{F_0}10^{x/L_2}\right)^2}}$$

A.N. : $F_0 = 1{,}6$ kHz ; $F_2 = 1$ Hz ; $L_2 = 1$ cm ; $L'_1 = 10$ cm

$$y = \frac{10}{\sqrt{1+3{,}95.10^{-7}.10^{2x}}}$$

## 3) Courbe [3]

**3-1)** On constate que l'échelle de la courbe 2 n'est pas satisfaisante : presque tout le graphe est concentré à gauche de la feuille.

$$x = L_3 \log\frac{f}{F_3} \Rightarrow f = F_3.10^{x/L_3}$$

$$T = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{f}{F_0}\right)^2}} \Rightarrow y = \frac{L'_1}{\sqrt{1+\left(\frac{F_3}{F_0}10^{x/L_3}\right)^2}}$$

A.N. : $F_0 = 1{,}6$ kHz ; $F_3 = 100$ Hz ; $L_3 = 10$ cm ; $L'_1 = 10$ cm

$$y = \frac{10}{\sqrt{1+3{,}95.10^{-3}.10^{0{,}2x}}}$$

**3-2)** On constate que les points sont mal répartis : l'écart géométrique entre deux points (pour un écart de fréquence constant, de 2 kHz ici) est trop grand dans la partie gauche du graphe puis trop faible à droite. Une échelle de valeurs logarithmique permet de remédier à ce problème.

## 4) Courbe [4]

$$y = L'_2 \log\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{F_3}{F_0}10^{x/L_3}\right)^2}}$$

A.N. : $F_0 = 1{,}6$ kHz ; $F_3 = 100$ Hz ; $L_3 = 10$ cm ; $L'_2 = 1$ cm

$$y = 10\log\frac{1}{\sqrt{1+3{,}95.10^{-3}.10^{0{,}2x}}} = -5\log\left(1+3{,}95.10^{-3}.10^{0{,}2x}\right)$$

ISBN 978-2-9520781-1-5  

## 5) Courbe [5]

Même constat que pour la courbe 2 : l'échelle de la courbe 4 n'est pas satisfaisante. Presque tout le graphe est concentré en haut de la feuille.

$$G = 20\log T = 20\log\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{f}{F_0}\right)^2}}$$

$$\Rightarrow y = \frac{L'_3}{20}20\log\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{F_3}{F_0}10^{x/L_3}\right)^2}} = L'_3\log\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{F_3}{F_0}10^{x/L_3}\right)^2}}$$

A.N. : $F_0$ = 1,6 kHz ; $F_3$ = 100 Hz ; $L_3$ = 10 cm ; $L'_3$ = 10 cm

$$y = -10\log\left(1+3{,}95.10^{-3}.10^{0,2x}\right)$$

**Tableau I**

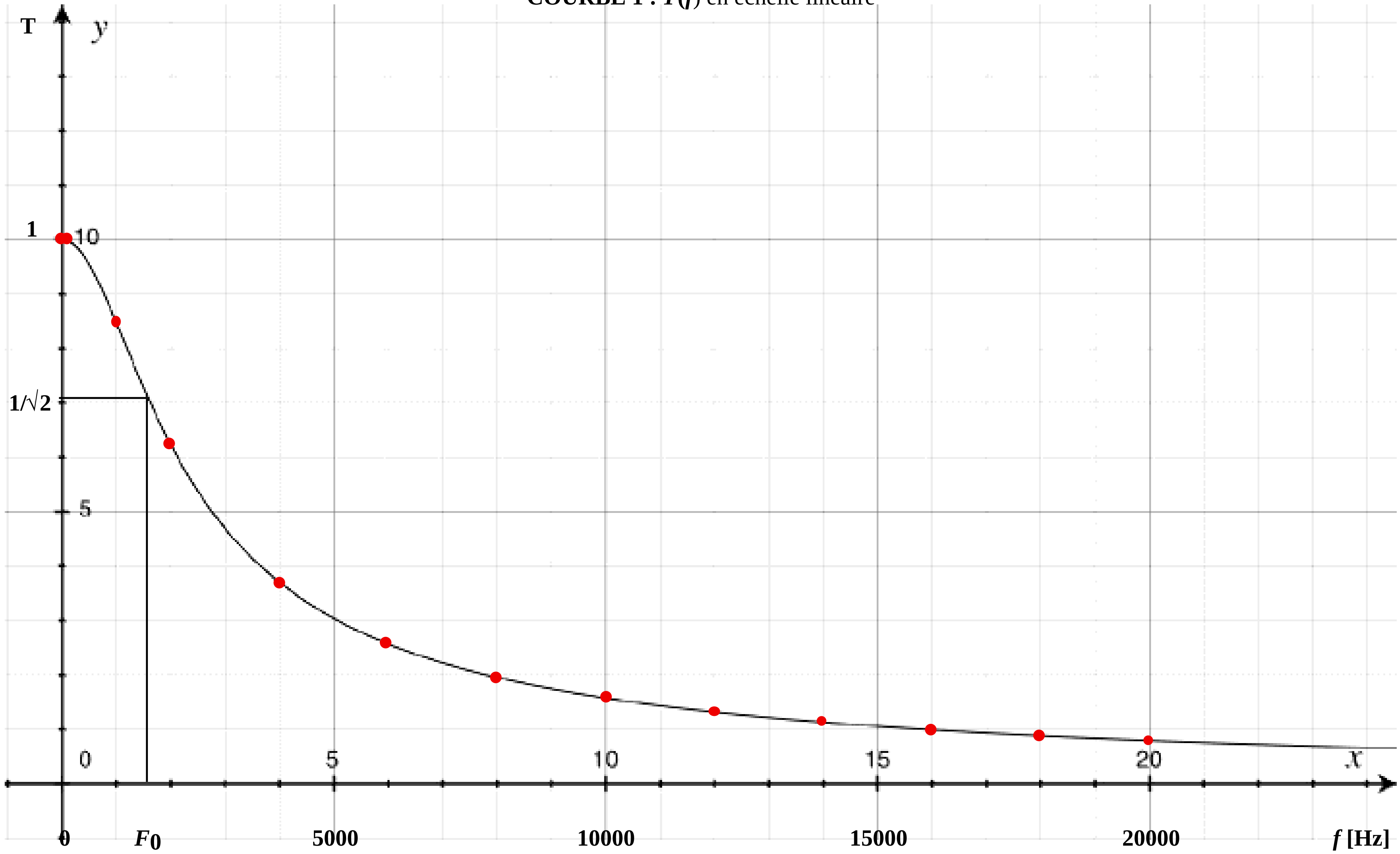
| A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|
| f [Hz] | T | y [cm] | x [cm] | x [cm] | x [cm] |
| 0 | 1,000 | 10,0 | 0,0 | - | - |
| 100 | 0,998 | 10,0 | 0,1 | 2,0 | 0,0 |
| 1000 | 0,847 | 8,5 | 1,0 | 3,0 | 10,0 |
| 2000 | 0,623 | 6,2 | 2,0 | 3,3 | 13,0 |
| 4000 | 0,370 | 3,7 | 4,0 | 3,6 | 16,0 |
| 6000 | 0,256 | 2,6 | 6,0 | 3,8 | 17,8 |
| 8000 | 0,195 | 2,0 | 8,0 | 3,9 | 19,0 |
| 10000 | 0,157 | 1,6 | 10,0 | 4,0 | 20,0 |
| 12000 | 0,131 | 1,3 | 12,0 | 4,1 | 20,8 |
| 14000 | 0,113 | 1,1 | 14,0 | 4,1 | 21,5 |
| 16000 | 0,099 | 1,0 | 16,0 | 4,2 | 22,0 |
| 18000 | 0,088 | 0,9 | 18,0 | 4,3 | 22,6 |
| 20000 | 0,079 | 0,8 | 20,0 | 4,3 | 23,0 |

**Tableau II**

| A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|
| f [Hz] | T | y [cm] | G [dB] | x [cm] |
| 100 | 0,998 | -0,0 | -0,0 | 0,0 |
| 200 | 0,992 | -0,0 | -0,1 | 3,0 |
| 400 | 0,970 | -0,1 | -0,3 | 6,0 |
| 800 | 0,893 | -0,5 | -1,0 | 9,0 |
| 1600 | 0,705 | -1,5 | -3,0 | 12,0 |
| 3200 | 0,445 | -3,5 | -7,0 | 15,1 |
| 6400 | 0,241 | -6,2 | -12,4 | 18,1 |
| 12800 | 0,123 | -9,1 | -18,2 | 21,1 |
| 20000 | 0,079 | -11,0 | -22,0 | 23,0 |

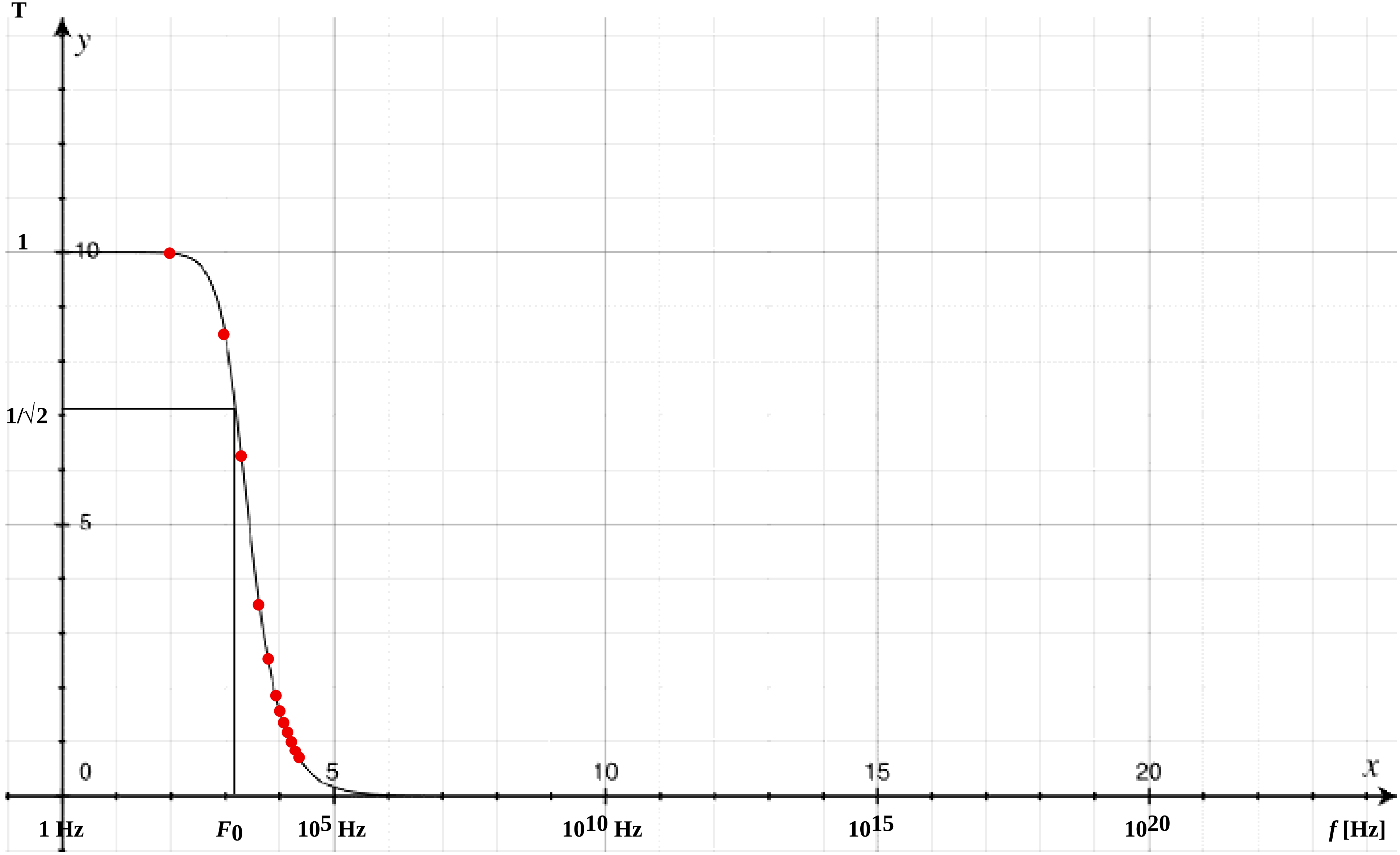
ISBN 978-2-9520781-1-5  

**COURBE 1 : *T*(*f*)** en échelle linéaire

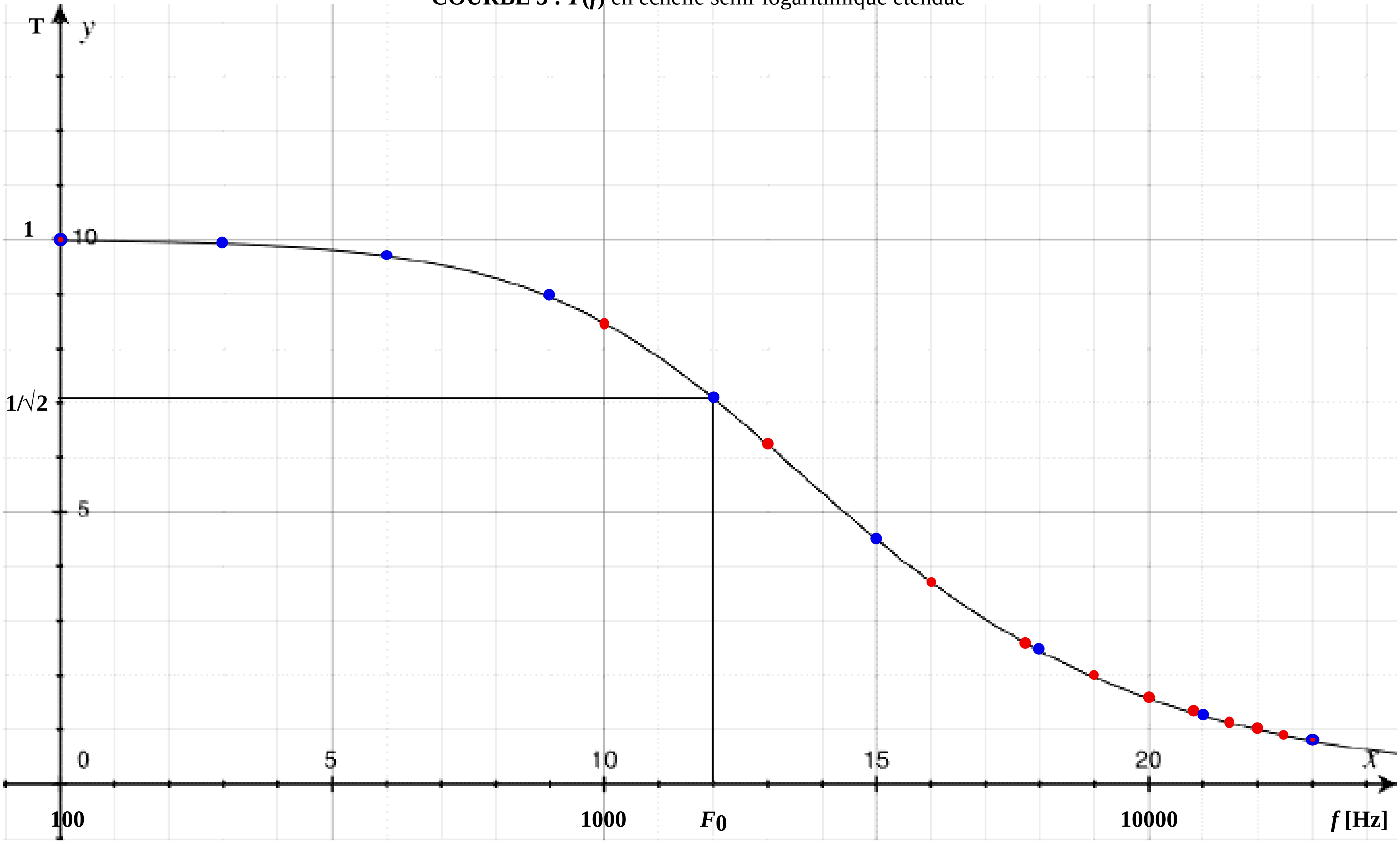



ISBN 978-2-9520781-1-5

**COURBE 2 : *T*(*f*)** en échelle semi-logaritlmique

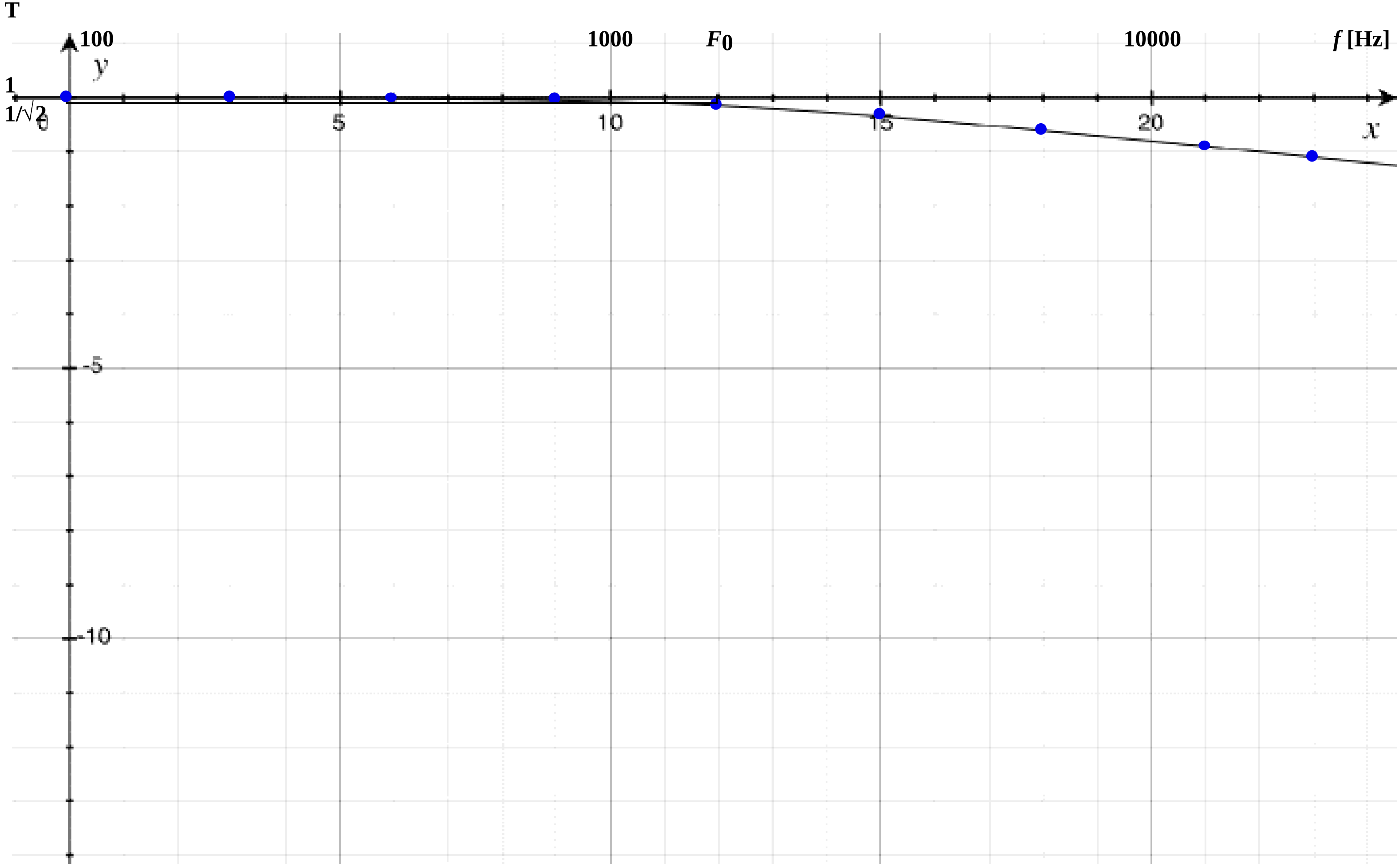


**COURBE 3 : *T*(*f*)** en échelle semi-logaritlmique étendue



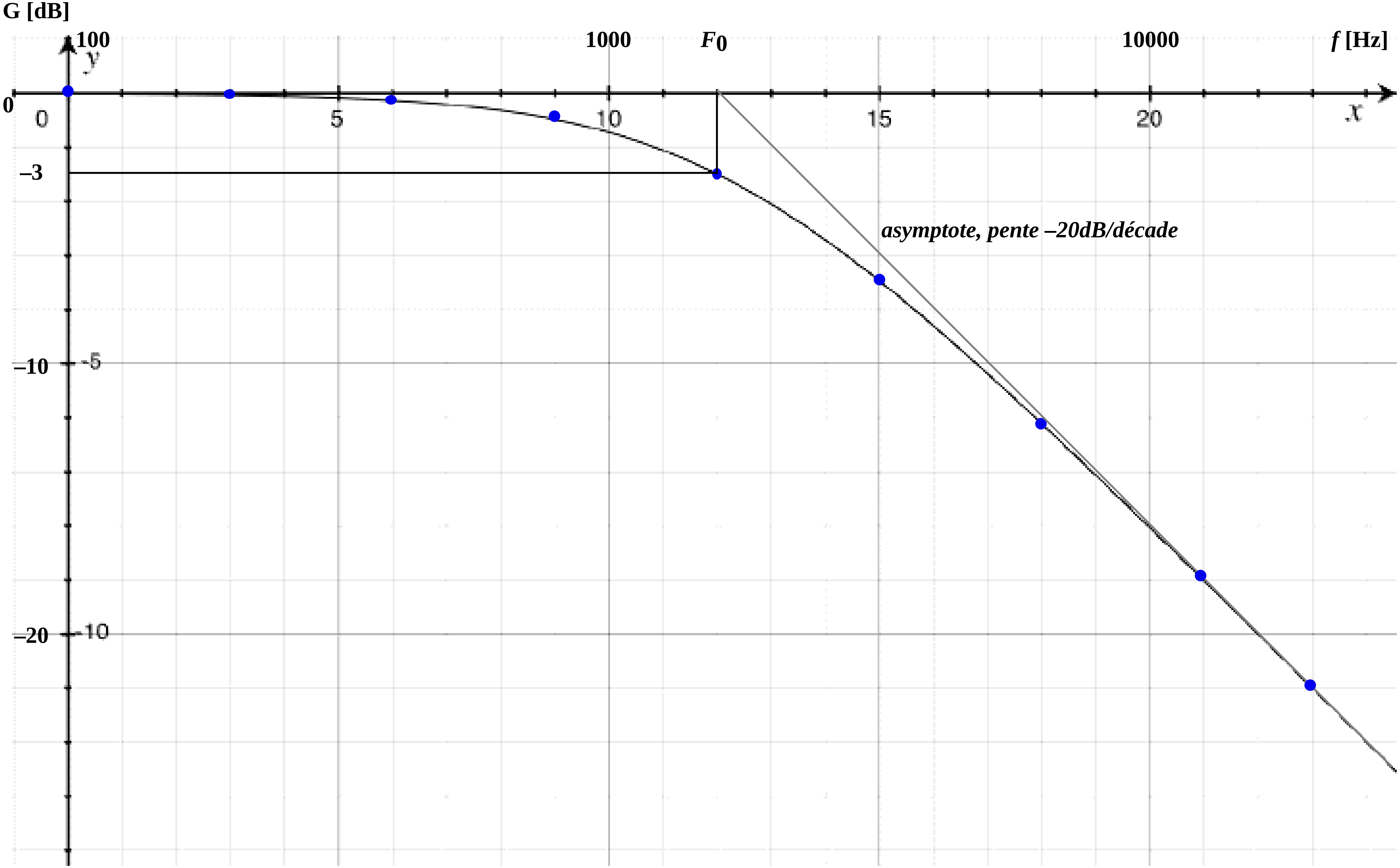

ISBN 978-2-9520781-1-5

**COURBE 4 : *T*(*f*)** en échelle log-log




ISBN 978-2-9520781-1-5

**COURBE 5 : *T*(*f*)** en échelle log-log étendue, ***T*** exprimée en décibels : ***G* = 20log[f(*f*)]**




ISBN 978-2-9520781-1-5  