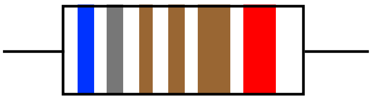
A16-1- Erreur et incertitude sur la mesure d'une résistance

On désire connaître la valeur exacte d'une résistance à couche métallique R choisie dans la série normalisée E96, de puissance 0,6W à 70°C.

a) On note sur ce composant le marquage suivant (anneaux 1, 2, 3, 4 étroits, anneaux 5, 6 larges) :



Donner la valeur marquée R_m de cette résistance, sa tolérance $\Delta R/R$, son coefficient de température C_T. *NB :* le comportement en température d'une résistance est défini par la relation :

$R_\theta = R_{20}.[1+C_T(\theta - 20)]$, où R_{20} est la résistance à 20°C, R_θ la résistance à θ °C.

Remplir le tableau ci-dessous. Conclusion ?

θ	Rmin	R	Rmax
0 °C			
20 °C			
70 °C			

b) Calculer la valeur maximale du courant admissible dans la résistance.

c) On mesure cette résistance par la méthode volt-ampèremétrique à l'aide de multimètres 4 digits. Les indications des appareils de mesure et leur précision sont les suivantes :

U (V)	5.485	précision du voltmètre : p_V = 0,05% + 2 digits
I (mA)	0.807	précision de l'ampèremètre : p_A = 0,1% + 5 digits

Calculer R , R_{min} , R_{max} , l'erreur absolue ε , l'erreur relative, l'incertitude $(\Delta R)_{95\%}$.

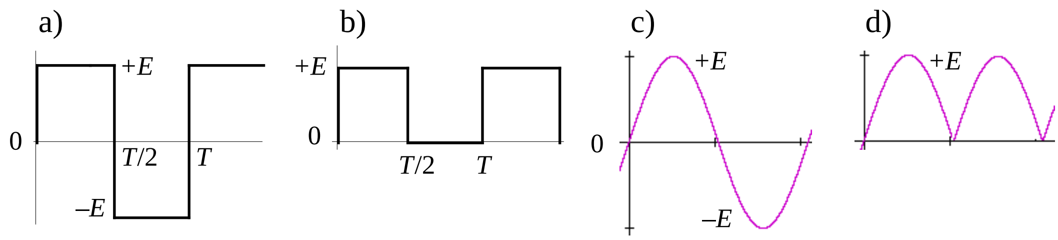
A16-2- Erreur et incertitude sur la mesure d'une inductance

Calculer la valeur d'une inductance mesurée par la fréquence de résonance d'un circuit RLC série. Rappel : la fréquence de résonance est telle que : $F_0 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$. Mesures :

F (Hz)	4852.3	précision du fréquencemètre : p_f = 0,01% + 5 digits
C (nF)	10 nF	tolérance : 5 %

A16-3- Mesures de valeurs efficaces vraies

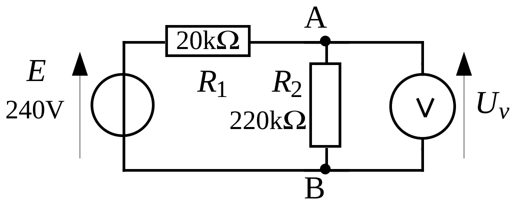
Soient V_{DC} la valeur moyenne d'un signal périodique, V_{AC+DC} sa valeur efficace vraie (ou valeur RMS), V_{AC} la valeur efficace de sa composante alternative. Un technicien ignare utilise un voltmètre RMS en mode V_{AC} pour mesurer la valeur efficace vraie des signaux ci-dessous. Calculer dans chaque cas l'erreur relative qu'il commet, définie par : $e_{\%} = \dfrac{|V_{AC+DC} - V_{AC}|}{V_{AC+DC}}$ X 100.



ISBN 2-9520781-1-4 http://www.syscope.net EAN 9782952078115

A16-4- Influence de l'impédance interne d'un appareil de mesure

1°) On utilise un voltmètre analogique, calibre 600 V, impédance spécifique 10 kΩ/V, pour mesurer une tension alternative U aux bornes d'un montage potentiométrique alimenté en 240 V.



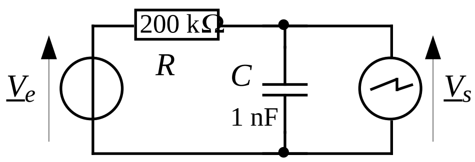
Remarque : cet appareil analogique est donc équivalent à une résistance $R_v = 10^4 \times 600 = 6\ \mathrm{M\Omega}$. *A contrario,* l'impédance interne d'un voltmètre numérique est en général indépendante du calibre (typiquement ≥ 10 MΩ).

a) Calculer la valeur théorique U_0 de la tension U vue entre les points A et B lorsque le circuit est à vide (voltmètre débranché).

b) Calculer la valeur U_v de la tension U réellement mesurée par le voltmètre.

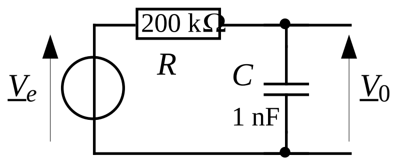
c) En déduire l'erreur relative commise sur U par rapport à la valeur exacte U_0.

2°) On utilise un oscilloscope d'impédance d'entrée 1MΩ/20pF pour observer la réponse d'un réseau RC, où R = 200 kΩ et C = 1 nF.



Remarque : ce réseau est un filtre passe-bas de fréquence de coupure $f_c = 1/2\pi RC \approx$ 800 Hz

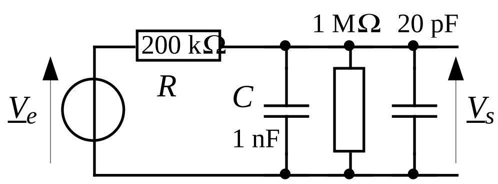
On considère tout d'abord que le circuit est à vide :



a) Si la tension d'entrée est une tension continue V_e = 1 V, quelle est la valeur de sa tension de sortie, notée V_0 ?

b) Même question pour le cas où la tension d'entrée $\underline{V_e}$ est une tension sinusoïdale pure de fréquence 800 Hz, d'amplitude 1 V et de phase nulle.

c) Réexaminer la question a) en tenant compte de l'impédance d'entrée de l'oscilloscope :

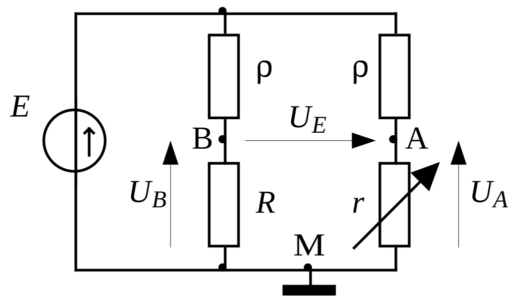


En déduire l'erreur relative commise sur V_s par rapport à la valeur exacte V_0.

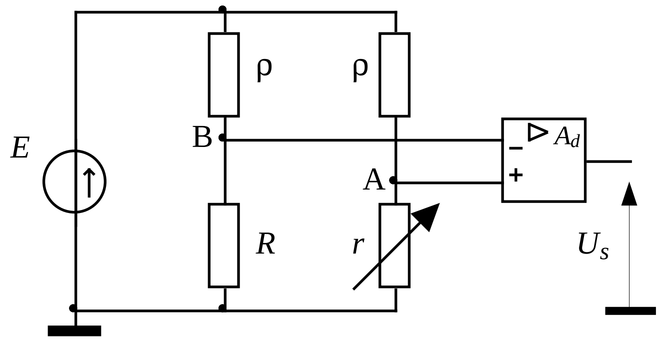
d) Réexaminer la question b) en tenant compte de l'impédance d'entrée de l'oscilloscope. En déduire les erreurs relatives d'amplitude et de phase commises sur $\underline{V_s}$ par rapport aux valeurs exactes de $\underline{V_0}$.

A16-5- Capteur-transmetteur : linéarisation d'une mesure au pont de Wheatstone

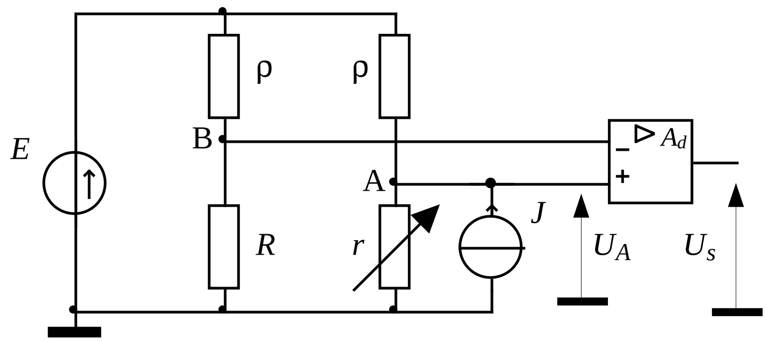
On désire mesurer la variation de résistance Δr d'un capteur résistif. On appelle r la résistance de ce capteur et r_0 la valeur de r quand $\Delta r = 0$. Soit : $r = r_0 + \Delta r$.



1) Le capteur est inséré dans un pont de Wheatstone. Calculer les ddp U_A, U_B et U_E en fonction de ρ, R, r et E. Quelle doit être la valeur de R pour que $U_E = 0$ quand $r = r_0$?



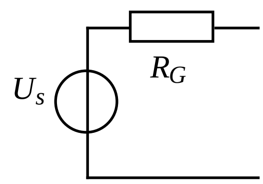
2) On choisit : $R = r_0$. On amplifie la ddp U_E à l'aide d'un amplificateur différentiel de gain A_d tel que : $U_s = A_d.U_E$. Cet amplificateur est supposé parfait : on admet que les intensités des courants d'entrée sont négligeables. Exprimer U_s en fonction de Δr, r_0, ρ, A_d et E .



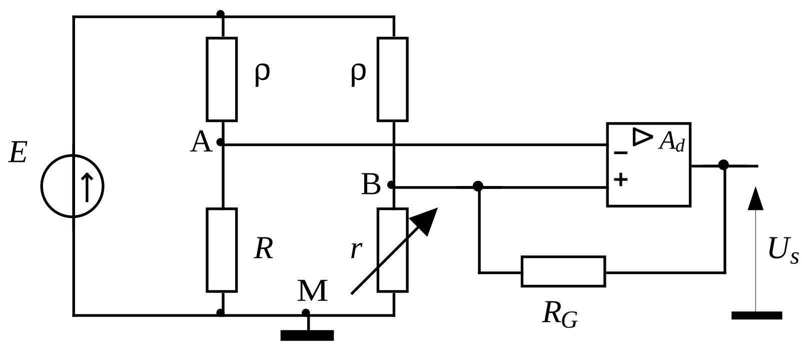
3) On place maintenant en parallèle sur la résistance r du pont une source de courant parfaite J. Exprimer U_A en fonction de J, r, ρ et E.

4) Si $J = \alpha.U_S$, α étant une constante, à quelle condition la ddp U_S peut-elle être rendue rigoureusement proportionnelle à Δr ?

5) Le générateur de courant J est réalisé à l'aide d'une résistance de forte valeur placée en rétroaction sur l'amplificateur. Etablir le schéma du générateur de Norton équivalent au générateur de Thévenin constitué de la tension U_s et de la résistance R_G .



6) En déduire la valeur de α en fonction de R_G. A.N. : calculer R_G sachant que ρ = 10 kΩ et A_d = 10. Cette source de courant peut-elle être considérée comme "idéale" ?
On donne : $r \approx 100\ \Omega$



REPONSES

A16-1- Erreur et incertitude sur la mesure d'une résistance

a) R_m = 6,81 kΩ ± 1% à 20°C avec $C_T \leq$ 50 ppm/°C

$\Rightarrow R_{20}$ = 6810(1 ± 0,01) Ω et $R_\theta = R_{20}.[1+C_T(\theta - 20)]$

θ	Rmin	R	Rmax
0 °C		6803	
20 °C	6742	6810	6878
70 °C		6827	

Conclusion : on remarque que les variations (maximales) de la valeur de la résistance en fonction de la température restent dans les limites de tolérance de celle-ci.

Nombre de chiffres significatifs affichés dans les résultats :

En écrivant l'erreur avec (au plus) deux chiffres significatifs, ε vaut : 6810 . 0,01 ≈ 68Ω.

La valeur de la résistance à 20 °C est donc : (6810 ± 81) Ω ou (6,810 ± 0,081) kΩ.

b) $I_{max} = \sqrt{\dfrac{P}{R}} \approx 9{,}4$ mA

c) $\varepsilon_U = U.0{,}0005+0{,}002$ = 0,005 V ; $U_{min} = U - \varepsilon_U$; $U_{max} = U + \varepsilon_U$

$\varepsilon_I = I.0{,}001+0{,}005$ = 0,006 mA ; $I_{min} = I - \varepsilon_I$; $I_{max} = I + \varepsilon_I$

$R = U / I$; $R_{min} = U_{min} / I_{max}$; $R_{max} = U_{max} / I_{min}$;

En résumé :

	mesuré	ε	min	max
U [V]	5,485	0,005	5,4803	5,4897
I [mA]	0,807	0,006	0,8012	0,8128
R [Ω]	6797	55	6742	6852
ΔR/R [%]		0,8		
ΔR(95%) [Ω]		63		

$\varepsilon_R = (R_{max} - R_{min})/2$ = 55 Ω $\Rightarrow R$ = (6797 ± 55) Ω

Erreur relative : $\dfrac{\Delta R}{R} = \dfrac{\varepsilon}{R}$ = 100 . 55 / 6797 ≈ 0,8 %.

Incertitude : $\Delta R_{95\%} = 2\sigma = 2\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{3}}$ = 63 Ω $\Rightarrow R = (6797 \pm 63)_{95\%}$ Ω ≈ $(6{,}80 \pm 0{,}06)_{95\%}$ kΩ

A16-2- Erreur et incertitude sur la mesure d'une inductance

$\varepsilon_f = F.0{,}0001+0{,}5 \approx 1$ Hz ; $F_{min} = F - \varepsilon_f$ = 4851,3 ; $F_{max} = F + \varepsilon_f$ = 4853,3

$\varepsilon_c = 10.0{,}05$ = 0,5 nF ; $C_{min} = C - \varepsilon_c$ = 9,5 nF ; $C_{max} = C + \varepsilon_c$ = 10,5 nF

$L = \dfrac{1}{4\pi^2 F^2 C} \approx 0{,}1076$ H ;

$L_{min} = \dfrac{1}{4\pi^2 F_{max}^2 C_{max}} \approx 0{,}1132$ H ; $L_{max} = \dfrac{1}{4\pi^2 F_{min}^2 C_{min}} \approx 0{,}1025$ H

$\Rightarrow \varepsilon = \dfrac{L_{max} - L_{min}}{2} \approx 0{,}005$ H

$\Rightarrow L \approx (0{,}108 \pm 0{,}005)$ H

On remarque que l'imprécision sur la valeur de C l'emporte de très loin sur celle de F. On pourrait donc appliquer le calcul simplifié suivant : $\dfrac{\Delta L}{L} \approx \dfrac{\Delta C}{C} = 5\% \Rightarrow L \approx (0{,}108 \pm 0{,}005)$ H

A16-3- Mesures de valeurs efficaces vraies

On rappelle que : $V_{AC+DC}^2 = V_{DC}^2 + V_{AC}^2$

a) et c) $V_{DC} = 0 \Rightarrow V_{AC+DC} \equiv V_{AC} \Rightarrow e = 0$ % (chance ! : pas d'erreur...)

b) En utilisant la méthode des surfaces, on calcule : $V_{DC} = \dfrac{E.\frac{T}{2}}{T} = \dfrac{E}{2}$; $V_{AC+DC} = \sqrt{\dfrac{E^2.\frac{T}{2}}{T}} = \dfrac{E}{\sqrt{2}}$

Donc : $V_{AC} = \sqrt{\dfrac{E^2}{2} - \dfrac{E^2}{4}} = \dfrac{E}{2}$. D'où $e = 100.\dfrac{\frac{E}{\sqrt{2}} - \frac{E}{2}}{\frac{E}{\sqrt{2}}} = 100.\left(1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = 29\%$!

d) En intégrant, on calcule : $V_{DC} = \dfrac{1}{T/2}\displaystyle\int_0^{T/2} E\sin\omega t.dt = \dfrac{E}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x.dx = \dfrac{E}{\pi}\left[-\cos x\right]_0^{\pi} = \dfrac{2E}{\pi}$

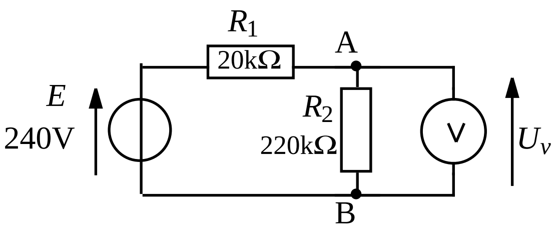
D'autre part, la valeur efficace vraie d'un signal sinusoïdal redressé est égale à la valeur efficace de ce signal (puisque le calcul fait intervenir son carré). Donc $V_{AC+DC} = \dfrac{E}{\sqrt{2}}$.

Donc : $V_{AC} = \sqrt{\dfrac{E^2}{2} - \dfrac{4E^2}{\pi^2}}$. D'où $e = 100.\dfrac{\frac{E}{\sqrt{2}} - \sqrt{\frac{E^2}{2} - \frac{4E^2}{\pi^2}}}{\frac{E}{\sqrt{2}}} = 100.\left(1 - \sqrt{1 - \dfrac{8}{\pi^2}}\right) = 56\%$!

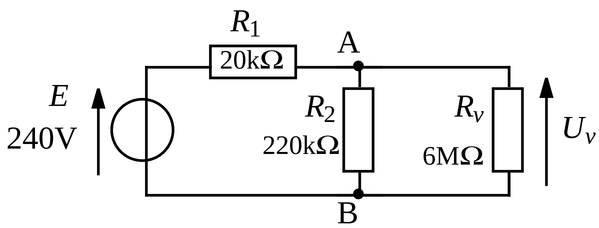
A16-4- Influence de l'impédance interne d'un appareil de mesure

1.a) Diviseur de tension à vide : $U_0 = E.\dfrac{R_2}{R_1 + R_2} = 220\ \text{V}$

1.b) Le voltmètre ayant une impédance interne de 10 kΩ/V sur le calibre 600 V, le circuit :



est équivalent à :

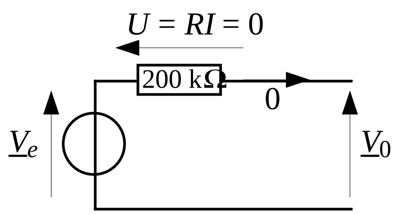


En appliquant la règle du diviseur de tension, il vient :

$$R_{eq} = \frac{R_2.R_v}{R_2 + R_v} \quad \text{et } U_v = \frac{R_{eq}}{R_1 + R_{eq}}E \Rightarrow U_v = \frac{R_2.R_v}{R_1.R_2 + R_1.R_v + R_2.R_v}E = 219{,}33\ \text{V}$$

1.c) $\dfrac{\Delta U}{U_0} = \dfrac{U_0 - U_v}{U_0} = \dfrac{220 - 219{,}33}{220} \approx 0{,}3\%$

2.a) En courant continu le condensateur ne joue aucun rôle. Le circuit ne débitant pas de courant, la tension de sortie est égale à la tension d'entrée : $V_0 = V_e = 1$ V.

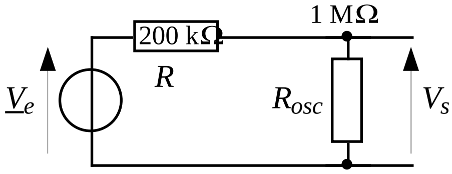


ISBN 2-9520781-1-4 http://www.syscope.net EAN 9782952078115

2.b) Pont diviseur de tension en alternatif :

$$\underline{V}_0 = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{R + \frac{1}{jC\omega}}\underline{V}_e = \frac{\underline{V}_e}{1 + RCj\omega} \Rightarrow \begin{cases} V_0 = \dfrac{V_e}{\sqrt{1 + (RC2\pi f)^2}} \approx 0,705 \text{ V} \\ Arg(\underline{V}_0) = -\arctan(RC2\pi f) \approx -45,1° \end{cases}$$

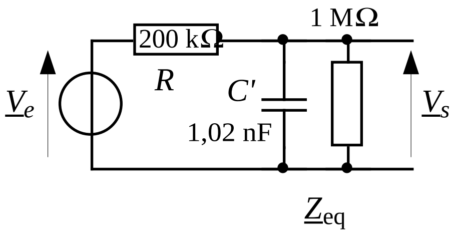
2.c) En CC, il faut tenir compte de la résistance d'entrée de l'oscilloscope R_{osc} = 1MΩ.



$$V_s = \frac{R_{osc}}{R + R_{osc}} \approx 0,833 \text{ V} \Rightarrow \frac{\Delta V_s}{V_0} = \frac{V_0 - V_s}{V_0} = \frac{1 - 0,833}{1} \approx 17\%$$

Conclusion : contrairement à la question 1.c, l'erreur commise est cette fois très importante.

2.d) En CA, il faut tenir compte de l'impédance d'entrée de l'oscilloscope. Le schéma est donc celui d'un pont diviseur de tension en alternatif :



Les deux capacités (C = 1 nF et la capacité d'entrée de l'oscilloscope, soit 20 pF) étant en parallèle s'ajoutent. Soit C' = C + 20 pF = 1,02 nF.

L'impédance équivalente est donc : $\underline{Z}_{eq} = \dfrac{R_{osc} \cdot \frac{1}{jC'\omega}}{R_{osc} + \frac{1}{jC'\omega}} = \dfrac{R_{osc}}{1 + jR_{osc}C'\omega}$

$$\Rightarrow \underline{V}_s = \frac{\underline{Z}_{eq}}{R + \underline{Z}_{eq}}\underline{V}_e = \frac{\frac{R_{osc}}{1 + jR_{osc}C'\omega}}{R + \frac{R_{osc}}{1 + jR_{osc}C'\omega}}\underline{V}_e = \frac{R_{osc}}{R(1 + jR_{osc}C'\omega) + R_{osc}}\underline{V}_e = \frac{\frac{R_{osc}}{R + R_{osc}}}{1 + j\frac{R_{osc}}{R + R_{osc}}RC'\omega}\underline{V}_e$$

D'où les erreurs de mesure :

$$\Rightarrow \begin{cases} V_s = \dfrac{\frac{R_{osc}}{R + R_{osc}}}{\sqrt{1 + \left(\frac{R_{osc}}{R + R_{osc}}RC'2\pi f\right)^2}}V_e \approx 0,634 \text{ V} \\ Arg(\underline{V}_s) = -\arctan\left(\frac{R_{osc}}{R + R_{osc}}RC'2\pi f\right) \approx -40,5° \end{cases} \qquad \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\Delta V_s}{V_0} = \dfrac{V_0 - V_s}{V_0} = \dfrac{0,705 - 0,634}{0,705} \approx 10\% \\ \dfrac{\Delta\varphi}{\varphi_0} = \left|\dfrac{\varphi_0 - \varphi}{\varphi_0}\right| = \dfrac{45,1 - 40,5}{45,1} \approx 10\% \end{cases}$$

A16-5-

1)

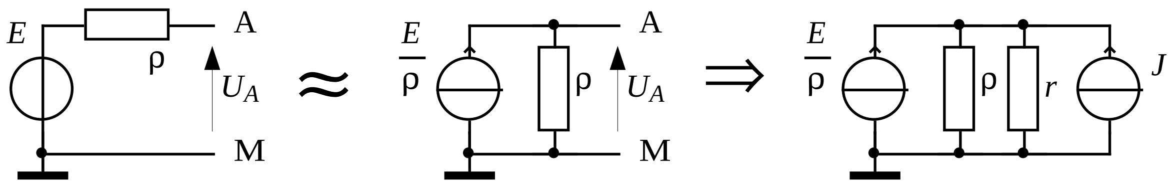
$$\left.\begin{array}{l} U_A = \dfrac{r}{\rho + r}E \\ U_B = \dfrac{R}{\rho + R}E \\ U_E = U_A - U_B \end{array}\right\} \Rightarrow U_E = \left(\frac{r}{\rho + r} - \frac{R}{\rho + R}\right)E \quad \Rightarrow U_E = 0 \text{ si } R = r_0 \text{ (quand } r = r_0\text{)}$$

2) On en déduit : $U_s = A_d\left(\dfrac{r_0 + \Delta r}{\rho + r} - \dfrac{r_0}{\rho + r_0}\right)E = A_d \dfrac{\rho \Delta r}{(\rho + r)(\rho + r_0)}E$

On constate que la relation $U_E(\Delta r)$ n'est pas linéaire !

3) Vu du point A, le générateur de tension E associé à la résistance ρ...

...est équivalent... au générateur de Norton ... ce qui conduit au schéma :



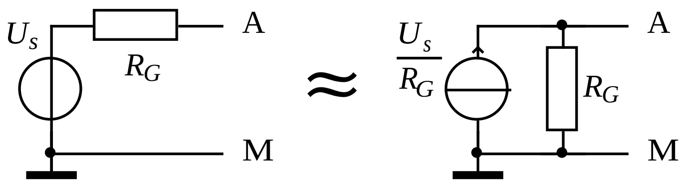
D'où : $U_A = \dfrac{\rho r}{\rho + r}\left(\dfrac{E}{\rho} + J\right) = \dfrac{r}{\rho + r}\left(E + \rho J\right)$

4) $J = \alpha.U_s \Rightarrow U_s = A_d\left(\dfrac{r}{\rho + r}\left(E + \rho\alpha U_s\right) - \dfrac{r_0}{\rho + r_0}E\right)$

En sortant U_s de cette expression, on trouve : $U_s = \dfrac{A_d.\rho.\Delta r.E}{(\rho + r_0)(\rho + r - \alpha.\rho.A_d.r)}$

Pour que U_s soit proportionnelle à Δr, il faut que : $r - \alpha.\rho.A_d.r = 0 \Leftrightarrow \alpha.\rho.A_d = 1 \Rightarrow \alpha = \dfrac{1}{\rho.A_d}$

5)



On peut négliger la résistance R_G mise en parallèle avec r si $R_G >> r$.

Or, $\alpha = \dfrac{1}{R_G} = \dfrac{1}{\rho.A_d} \Rightarrow R_G = \rho.A_d = 100 \text{ k}\Omega$, ce qui est bien très supérieur à l'ordre de grandeur de r (100 Ω).