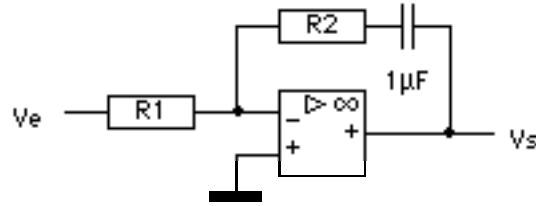


A22-1- Action proportionnelle et intégrale.

1-1) Etablir l'expression de la fonction de transfert $T(j\omega) = \frac{V_s}{V_e}$ du correcteur PI ci-dessous.

En remplaçant $j\omega$ par p , montrer que cette expression s'écrit en notation de Laplace :

$$T = \frac{V_s}{V_e} = K_i \left(1 + \frac{1}{\tau_i p} \right)$$



En déduire les expressions de K_i et τ_i en fonction de R_1 , R_2 , et C_i .

1-2) Sachant que, en notation de Laplace, $U_2 = \frac{U_1}{p} \Leftrightarrow u_2 = \int_0^t u_1 \cdot dt$, en déduire l'équation différentielle qui lie $v_s(t)$ à $v_e(t)$.

1-3) En déduire l'expression de $v_s(t)$ pour $t \geq 0$ si on applique à l'entrée un échelon de tension :

$$\begin{cases} t < 0 : v_e = 0 \text{ et } v_s = 0 \\ t \geq 0 : v_e = E \end{cases}$$

1-4) Calculer $v_s(0^+)$ et $v_s(\tau_i)$.

1-5) Pour le correcteur PI étudié, la réponse à un échelon a donné le résultat tracé ci-dessous. Mesurer K_i et τ_i en utilisant les résultats du 1-4. En déduire les valeurs numériques de R_1 et R_2 .



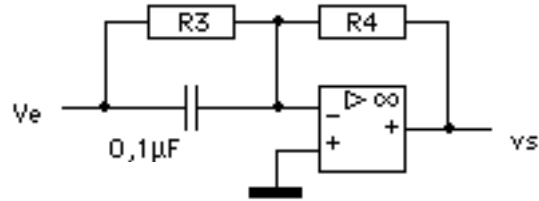
1-6) Tracer le diagramme asymptotique de la courbe de gain dans le plan de Bode.

1-7) Pour limiter le gain en basse fréquence, on ajoute une résistance r_i en parallèle sur le circuit $R_2 C_i$. Calculer r_i pour limiter ce gain à 48 dB en CC. Jusqu'à quelle fréquence cette limitation agit-elle ?

A22-2- Action proportionnelle et dérivée.

2-1) Etablir l'expression de la fonction de transfert $T(j\omega)$ du correcteur PD ci-dessous. En remplaçant $j\omega$ par p , montrer que cette expression s'écrit en notation de Laplace :

$$T = \frac{V_s}{V_e} = K_d(1 + \tau_d p)$$



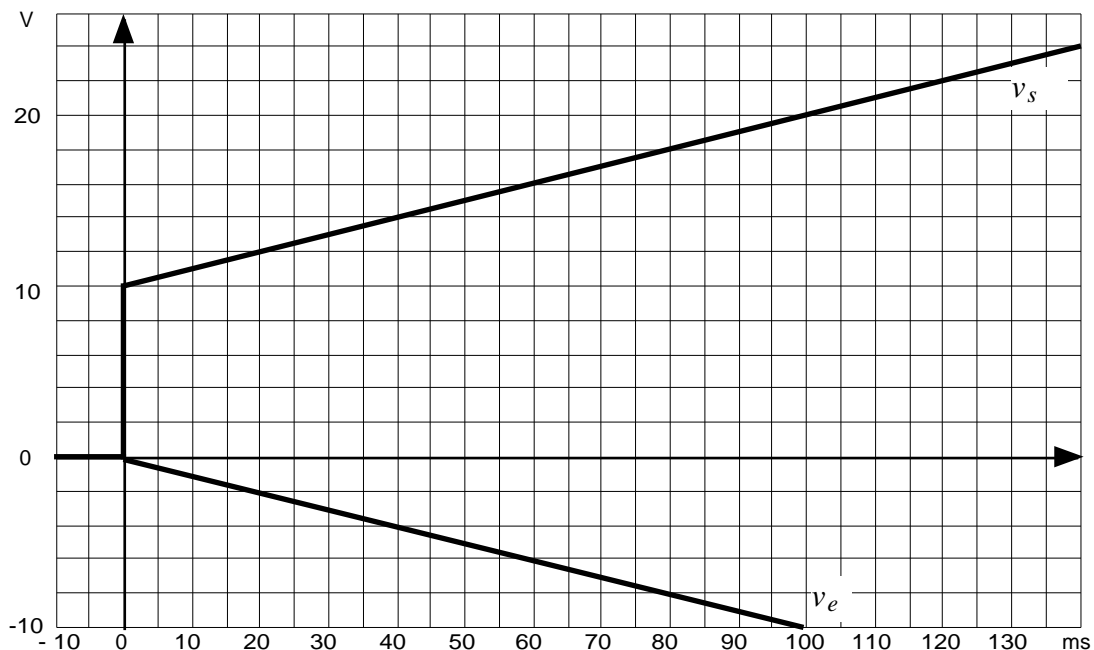
En déduire les expressions de K_d et τ_d en fonction de R_3 , R_4 , et C_d .

2-2) Sachant que, en notation de Laplace, $U_2 = pU_1 \Leftrightarrow u_2 = \frac{du_1}{dt}$, en déduire l'équation différentielle qui lie $v_s(t)$ à $v_e(t)$.

2-3) En déduire l'expression de $v_s(t)$ si on applique à l'entrée une rampe telle que : $v_e(t) = at$.

2-4) Calculer $v_s(0^+)$ et $v_s(\tau_d)$.

2-5) Pour le correcteur PD étudié, la réponse à une rampe a donné le résultat tracé ci-dessous. Mesurer K_d et τ_d en utilisant les résultats du 2-4. En déduire les valeurs numériques de R_3 et R_4 .



2-6) Tracer le diagramme asymptotique de la courbe de gain dans le plan de Bode.

2-7) Pour limiter le gain en haute fréquence, on insère une résistance $r_d \ll R_3$ en série avec C_d .

Calculer r_d pour limiter ce gain à 48 dB en HF.

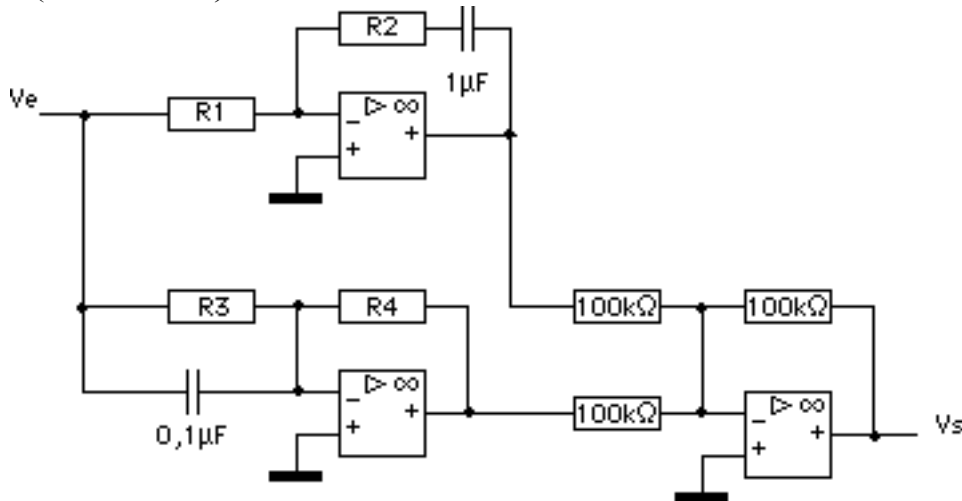
A partir de quelle fréquence cette limitation agit-elle ?

A22-3- Action PID.

3-1) Etablir l'expression de la fonction de transfert $\underline{T}(j\omega) = \frac{V_s}{V_e}$ du correcteur PID ci-dessous (structure "mixte").

En remplaçant $j\omega$ par p , montrer que cette expression s'écrit en notation de Laplace :

$$T = \frac{V_s}{V_e} = K \left(1 + \frac{1}{T_i p} + T_d p \right)$$



3-2) En déduire l'équation différentielle qui lie $v_s(t)$ à $v_e(t)$.

3-3) Calculer les valeurs numériques de T_i , T_d , K .

3-4) En déduire l'expression de $v_s(t)$ si on applique à l'entrée une rampe telle que : $v_e(t) = at$.

A22-4- Correcteur PI non inverseur

1) a) Quel est le régime de fonctionnement de l'AOP ? Quelle relation y a-t-il entre V_e et V_k ?

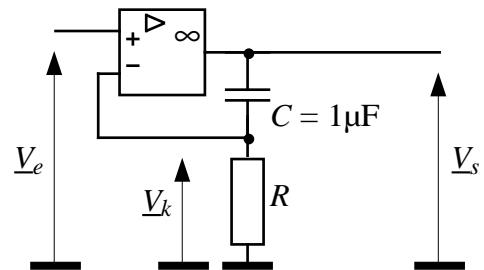
b) Exprimer V_k en fonction de V_s . En déduire

l'expression de la fonction de transfert $\underline{T}(j\omega) = \frac{V_s}{V_e}$

c) En remplaçant $j\omega$ par p , montrer que cette expression

s'écrit en notation de Laplace : $T = \frac{V_s}{V_e} = 1 + \frac{1}{\tau p}$

Préciser l'expression de τ en fonction de R et C .



2) Sachant que, en notation de Laplace, $U_2 = \frac{U_1}{p} \Leftrightarrow u_2 = \int u_1 . dt$, en déduire l'équation différentielle qui lie $v_s(t)$ à $v_e(t)$.

3) a) En déduire l'expression de $v_s(t)$ pour $t \geq 0$ si on applique à l'entrée un échelon de tension :

$$\begin{cases} t < 0 : v_e = 0 \text{ et } v_s = 0 \\ t \geq 0 : v_e = E \end{cases}$$

b) Calculer $v_s(0^+)$ et $v_s(\tau)$.

REPONSES

A22-1- Correcteur PI

$$1-1) \underline{T} = -\frac{R_2 + \frac{1}{jC_i\omega}}{R_1} = -\frac{1 + jR_2C_i\omega}{jR_1C_i\omega} = -\frac{R_2}{R_1} \frac{1 + jR_2C_i\omega}{jR_2C_i\omega} = -\frac{R_2}{R_1} \left(1 + \frac{1}{jR_2C_i\omega} \right)$$

$$1-2) T = \frac{V_s}{V_e} = K_i \left(1 + \frac{1}{\tau_i p} \right) \Rightarrow V_s = K_i V_e + \frac{K_i V_e}{\tau_i p} \Rightarrow v_s = K_i v_e + \frac{K_i}{\tau_i} \int_0^t v_e dt$$

$$1-3) \text{ On suppose que pour } t < 0, v_e \text{ et } v_s \text{ sont nulles : } \left. \begin{array}{l} v_s = K_i v_e + \frac{K_i}{\tau_i} \int_0^t v_e dt \\ t \geq 0 : v_e = E \end{array} \right\} \Rightarrow v_s = K_i E + \frac{K_i}{\tau_i} E t$$

$$1-4) v_s(0^+) = K_i E ; v_s(\tau_i) = 2K_i E$$

$$1-5) \text{ On lit : } E = -1 \text{ V et } v_s(0^+) = 10 \text{ V} = K_i E \text{ donc } K_i = -10$$

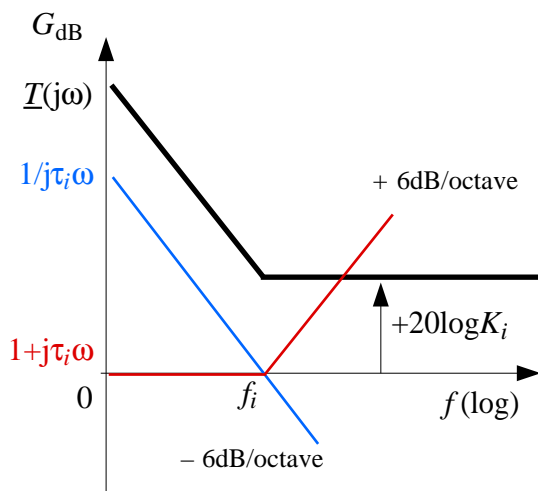
$$\text{Puis on reporte sur le graphe : } 2K_i E = 20 \text{ V} = v_s(\tau_i) \Rightarrow \text{on lit : } \tau_i = 100 \text{ ms}$$

$$\text{Enfin on calcule : } \tau_i = R_2 C_i \Rightarrow R_2 = \frac{\tau_i}{C_i} = \frac{0,1}{1.10^{-6}} = 100 \text{ k}\Omega \quad \text{et}$$

$$K_i = -\frac{R_2}{R_1} \Rightarrow R_1 = -\frac{R_2}{K_i} = -\frac{1.10^5}{-10} = 10 \text{ k}\Omega$$

$$1-6) G = 20 \log |T| = 20 \log \left| K_i \frac{1 + j\tau_i\omega}{j\tau_i\omega} \right| = \underbrace{20 \log |K_i|}_{20 \log 10 = 20 \text{ dB}} + \underbrace{20 \log \left| \frac{1}{j\tau_i\omega} \right|}_{\text{diagramme de la fonction } \frac{1}{jx}} + \underbrace{20 \log |1 + j\tau_i\omega|}_{\text{diagramme de la fonction } 1 + jx}$$

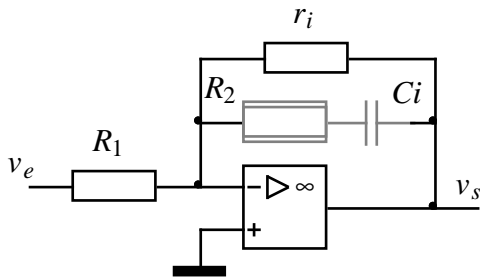
On trace le diagramme asymptotique de gain, qui est la somme des diagrammes des trois fonctions élémentaires :



$$f_i = \frac{1}{2\pi\tau_i} = 1,6 \text{ Hz}$$

$$\underline{T}(j\omega) = K_i \frac{1}{j\tau_i\omega} (1 + j\tau_i\omega)$$

1-7) En courant continu, le condensateur ne conduit pas. Le gain du montage est donc celui d'un amplificateur inverseur classique :

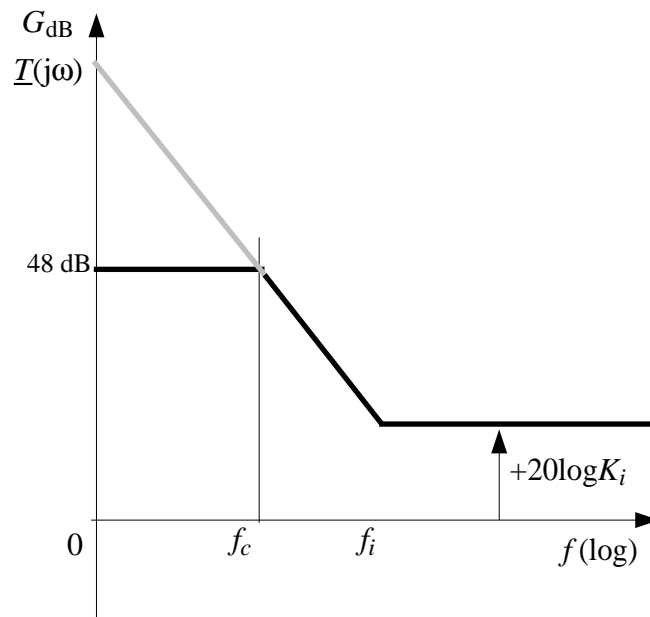


$$G = 20 \log \frac{r_i}{R_1} = 48 \Rightarrow \frac{r_i}{R_1} = 10^{\frac{48}{20}} = 251 \Rightarrow r_i = 251 \cdot 10000 \approx 2,5 \text{ M}\Omega$$

Cette résistance r_i n'agira qu'en très basse fréquence, en deçà d'une fréquence de coupure f_c . Comme on le voit sur le diagramme, le calcul s'effectue en considérant que l'on doit avoir l'égalité :

$$G = 20 \log \frac{r_i}{R_1} \approx 20 \log |K_i| + 20 \log \left| \frac{1}{j\tau_i \omega} \right| = 20 \log \frac{R_2}{R_1} + 20 \log \frac{1}{\tau_i 2\pi f_c} \quad \text{soit : } \frac{r_i}{R_1} = \frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{1}{\tau_i 2\pi f_c}$$

Or $f_i = \frac{1}{2\pi\tau_i}$, donc, en simplifiant par R_1 : $r_i = R_2 \cdot \frac{f_i}{f_c} \Rightarrow f_c = f_i \frac{R_2}{r_i}$, soit $f_c \approx f_i/25 \approx 0,064 \text{ Hz}$



A22-2- Correcteur PD

$$2-1) \underline{T} = -\frac{R_4}{\frac{1}{R_3} + jC_d\omega} = -R_4 \left(\frac{1}{R_3} + jC_d\omega \right) = -\frac{R_4}{\underbrace{R_3}_{K_d}} \left(1 + j\underbrace{R_3 C_d}_{\tau_d} \omega \right)$$

$$2-2) T = \frac{V_s}{V_e} = K_d(1 + \tau_d p) \Rightarrow V_s = K_d V_e + K_d \tau_d p V_e \Rightarrow v_s = K_d v_e + K_d \tau_d \frac{dv_e}{dt}$$

$$2-3) \left. \begin{aligned} v_s &= K_d v_e + K_d \tau_d \frac{dv_e}{dt} \\ t \geq 0 : v_e &= at \end{aligned} \right\} \Rightarrow v_s = K_d at + K_d \tau_d a$$

$$2-4) v_s(0^+) = K_d \tau_d a ; v_s(\tau_d) = 2K_d \tau_d a$$

2-5) On lit : $a = -100 \text{ V/s}$ et $v_s(0^+) = 10 \text{ V} = K_d \tau_d a$ donc $K_d \tau_d = -0,1 \text{ s}$

Puis on reporte sur le graphe : $2K_d \tau_d a = 20 \text{ V} = v_s(\tau_d) \Rightarrow$ on lit : $\tau_d = 100 \text{ ms}$

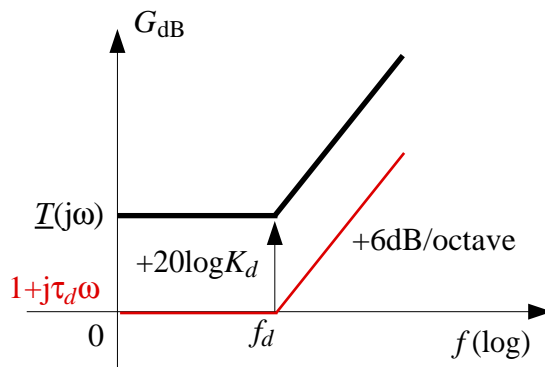
On en déduit : $K_d = -1$

Enfin on calcule : $\tau_d = R_3 C_d$

$$\Rightarrow R_3 = \frac{\tau_d}{C_d} = \frac{0,1}{0,1 \cdot 10^{-6}} = 1 \text{ M}\Omega \text{ et } K_d = -\frac{R_4}{R_3} \Rightarrow R_4 = -K_d R_3 = -(-1)1 = 1 \text{ M}\Omega$$

$$2-6) G = 20 \log |T| = 20 \log |K_d(1 + j\tau_d \omega)| = \underbrace{20 \log |K_d|}_{20 \log 1 = 0 \text{ dB}} + \underbrace{20 \log |1 + j\tau_d \omega|}_{\text{diagramme de la fonction } 1+jx}$$

D'où le diagramme indiqué ci-dessous :

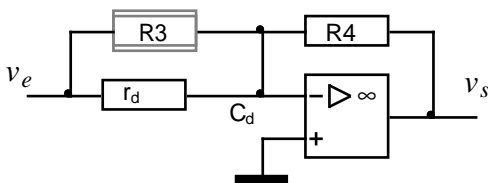


$$f_d = \frac{1}{2\pi\tau_d} = 1,6 \text{ Hz}$$

$$T(j\omega) = K_d(1 + j\tau_d\omega)$$

$$K_d = 1 \Rightarrow \text{ici, } 20 \log K_d = 0$$

2-7) En HF, l'impédance du condensateur tend vers 0. Le gain du montage est donc celui d'un amplificateur inverseur classique. Comme $r_d \ll R_3$, on peut négliger R_3 qui est en parallèle avec r_d :



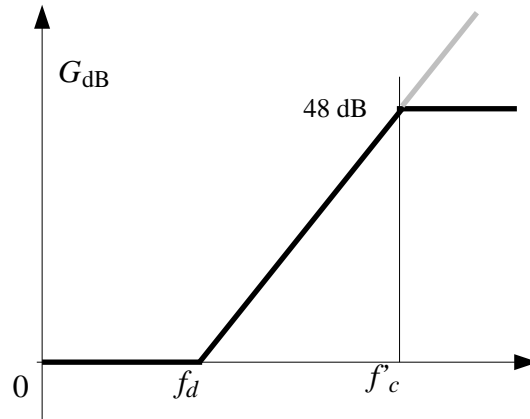
$$G = 20 \log \frac{R_4}{r_d} = 48 \Rightarrow \frac{R_4}{r_d} = 10^{\frac{48}{20}} = 251 \Rightarrow r_d = 1.000.000 / 251 \approx 4 \text{ k}\Omega$$

Cette résistance r_d n'agira qu'en très haute fréquence, au delà d'une fréquence f'_c telle que :

$$G = 20 \log \frac{R_4}{r_d} \approx 20 \log |K_d| + 20 \log |j\tau_d \omega| = 20 \log \frac{R_4}{R_3} + 20 \log \tau_d 2\pi f'_c \Rightarrow$$

$$\frac{R_4}{r_d} \approx \frac{R_4}{R_3} \cdot \tau_d 2\pi f'_c \Rightarrow f'_c = \frac{R_3}{r_d} \frac{1}{2\pi\tau_d}$$

$$\text{Or } f_d = \frac{1}{2\pi\tau_d}, \text{ donc } f'_c = f_d \frac{R_3}{r_d} \text{ soit, numériquement, } f'_c \approx f_d \cdot 250 \approx 400 \text{ Hz}$$



A22-3- Correcteur PID

$$3-1) T = \frac{V_s}{V_e} = K \left(1 + \frac{1}{T_i p} + T_d p \right) \Rightarrow V_s = K V_e + \frac{K V_e}{T_i p} + K T_d p V_e \Rightarrow v_s = K v_e + \frac{K}{T_i} \int_0^t v_e dt + K T_d \frac{d v_e}{dt}$$

3-2) On reconnaît le schéma d'un sommateur inverseur, donc la FT du PID est la somme des FT des correcteurs PI et PD :

$$T = - \left(K_i \left(1 + \frac{1}{\tau_i p} \right) + K_d (1 + \tau_d p) \right) = \underbrace{-(K_i + K_d)}_{-K} \left(1 + \underbrace{\frac{K_i}{K_i + K_d} \frac{1}{\tau_i}}_{\frac{1}{T_i}} \frac{1}{p} + \underbrace{\frac{K_d}{K_i + K_d} \tau_d}_{T_d} p \right)$$

$$\text{Soit, par identification : } \begin{cases} K = -(K_i + K_d) = 10 + 1 = 11 \\ T_i = \frac{K_i + K_d}{K_i} \tau_i = \frac{11}{10} 0,1 = 110 \text{ ms} \\ T_d = \frac{K_d}{K_i + K_d} \tau_d = \frac{1}{11} 0,1 \approx 9,1 \text{ ms} \end{cases}$$

On remarque qu'il n'est pas possible de régler T_i et T_d indépendamment, ce qui constitue un inconvénient de ce type de schéma.

3-3) On suppose que pour $t < 0$, v_e et v_s sont nulles :

$$\left. \begin{array}{l} v_s = K v_e + \frac{K}{T_i} \int_0^t v_e dt + K T_d \frac{d v_e}{dt} \\ t \geq 0 : v_e = at \end{array} \right\} \Rightarrow v_s = K a t + \frac{1}{2} \frac{K}{T_i} a t^2 + K T_d a$$

A22-4

1) AOP en régie de fonctionnement linéaire car boucle de contre-réaction entre la sortie et l'entrée (-).
Donc $\underline{V}_e = \underline{V}_k$

$$\left. \begin{array}{l} \underline{V}_e = \underline{V}_k \\ \underline{V}_k = \frac{R}{R + \frac{1}{jC\omega}} \underline{V}_s \\ \tau = RC \end{array} \right\} \Rightarrow T = \frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e} = \frac{1 + jRC\omega}{jRC\omega} = 1 + \frac{1}{j\tau\omega}$$

$$\frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e} = 1 + \frac{1}{\tau p} \Rightarrow \underline{V}_s = \underline{V}_e + \frac{\underline{V}_e}{\tau p} \Rightarrow v_s(t) = v_e(t) + \frac{1}{\tau} \int v_e(t).dt$$

$$v_e(t) = E \Rightarrow v_s(t)_{t>0} = E + \frac{E}{\tau}t \Rightarrow v_s(0^+) = E ; v_s(\tau) = 2E$$

