B21-1- Équation aux différences du 2° ordre

1°) On considère une grandeur $u(t)$, sa dérivée première du/dt et sa dérivée seconde d^2u/dt^2. Soit $u(k)$ cette même grandeur sous forme échantillonnée. Écrire la forme numérisée de ces dérivées en précisant la signification des paramètres employés. NB : utiliser la forme "dérivée arrière".

2°) Équation aux différences : soit une équation diférentielle écrite de façon normalisée :

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 2m\omega_0 \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = \omega_0^2 v$$

soit encore, en posant $\tau = \dfrac{1}{\omega_0}$:

$$\tau^2 \frac{d^2u}{dt^2} + 2m\tau \frac{du}{dt} + u = v$$

On donne : $\omega_0 = 2\pi$ rad/s $\Leftrightarrow \tau = 1/2\pi \approx 0{,}16$ s ; $F_0 = \omega_0/2\pi = 1$ Hz ; $T_0 = 1/F_0 = 1$s

a) Écrire sous forme littérale, à partir de cette dernière équation, l'équation aux différences liant $u(k)$, $u(k–1)$, $u(k–2)$ et $v(k)$. On appellera T_e la période d'échantillonnage. On fera apparaître le rapport T_e/τ dans l'écriture de l'équation.

b) En déduire l'équation de récurrence donnant $u(k)$ en fonction de $u(k–1)$, $u(k–2)$ et $v(k)$.

3°) Soit $m = 0$ (amortissement nul). On soumet le système caractérisé par cette équation à un échelon unité :

$v(k) = 0$ pour $k < 0$

$v(k) = 1$ pour $k \geq 0$

Rappel : dans le cas d'un amortissement nul, la réponse attendue est une oscillation non amortie de période $T = 1$s et de fréquence 1Hz.

Les courbes pages suivantes sont le résultat de la résolution numérique de l'équation précédente pour différentes valeurs de T_e.

On constate que les courbes obtenues montrent l'existence d'un amortissement non nul variant selon la valeur de T_e : il existe un amortissement m' supplémentaire (supplémentaire car normalement $m = 0$) dû à la discrétisation de l'équation différentielle en une équation aux différences.

NB : soit N le nombre d'échantillons, et T la durée (encore appelée "fenêtre") sur laquelle s'effectue le calcul . On vérifie la relation :

$T = N.T_e \Leftrightarrow T_e = T/N$

Différentes valeurs de T sont choisies en fonction de N pour faciliter l'observation de chaque réponse.

a) Pour chaque valeur de N remplir le tableau ci-dessous et mesurer pour chaque courbe l'amortissement m' :

N	T [s]	T_e [s]	D	τ_p [s]	m'	T_e/τ
100	4					
200	6					
500	10					
1000	15					
2000	20					
5000	30					

Méthode : - mesure du dépassement : $m' = -\dfrac{\ln D}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2 D}}$

ou : - mesure de la constante de temps τ_p de l'enveloppe : $m' = \dfrac{1}{\tau_p \omega_0}$

b) Tracer la courbe donnant m' en fonction du rapport T_e/τ.

c) En déduire une relation approchée entre m' et T_e/τ.

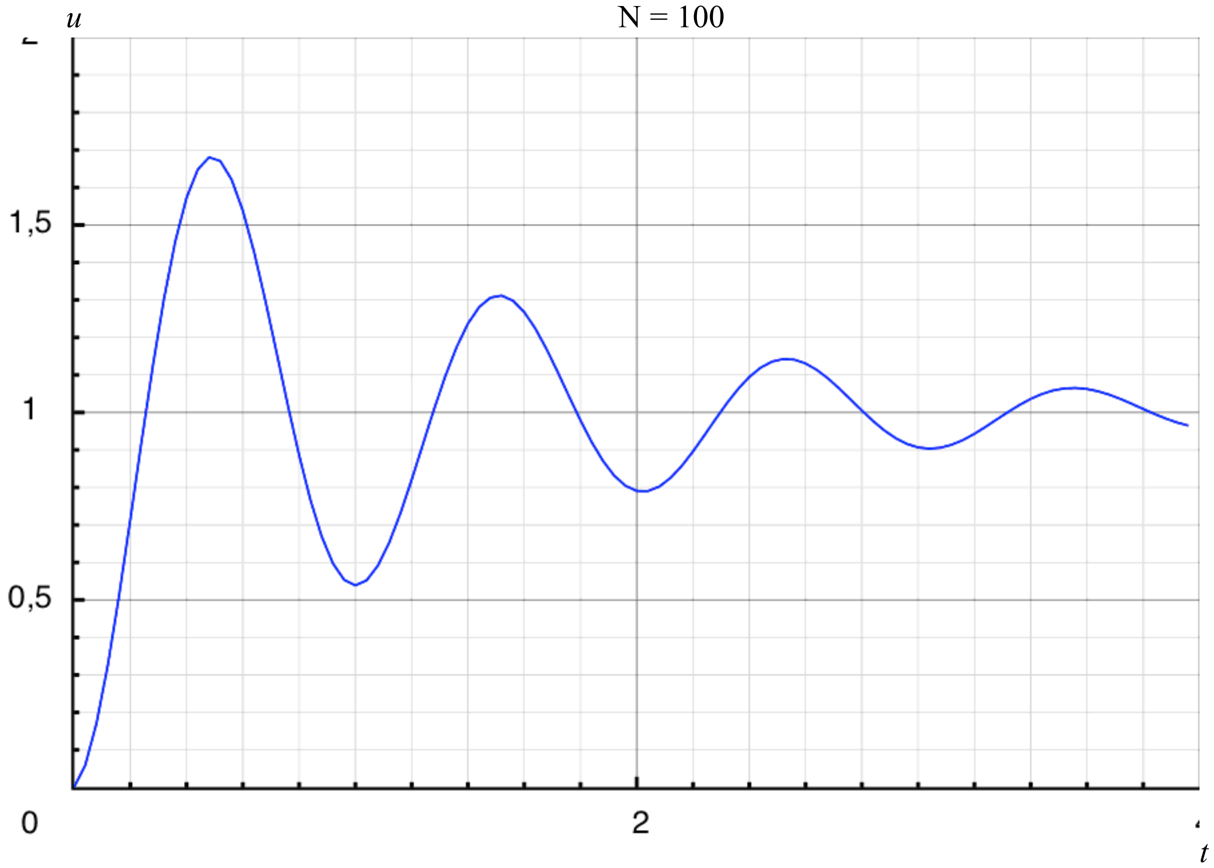
4°) *Rappel (théorème du retard)* : $\underline{u}(k-1) = \underline{u}(k).e^{-j\omega T_e}$ avec $e^{-j\omega T_e} = \cos\omega T_e - j\sin\omega T_e$

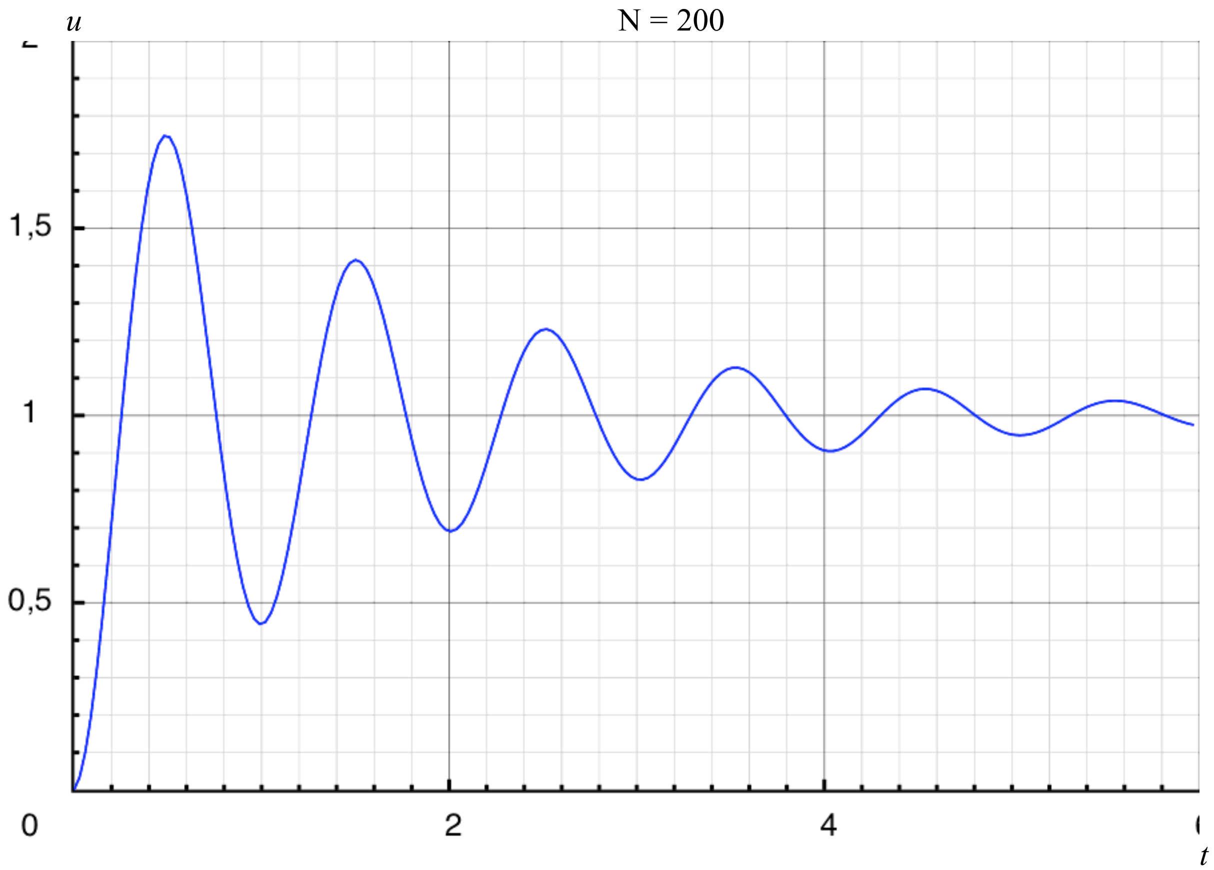
a) Établir l'expression de la fonction de transfert $\underline{T}(j\omega) = \underline{U} / \underline{V}$ du système du 2° ordre caractérisé par cette équation de récurrence (faire apparaître le rapport T_e/τ dans l'écriture de ces fonctions).

b) Soit $m = 0$. Établir l'expression du gain $G(f) = 20\log(\underline{T})$ en fonction de m'. Vérifier qualitativement que la courbe de gain est amortie, et que cet amortissement dépend de T_e.

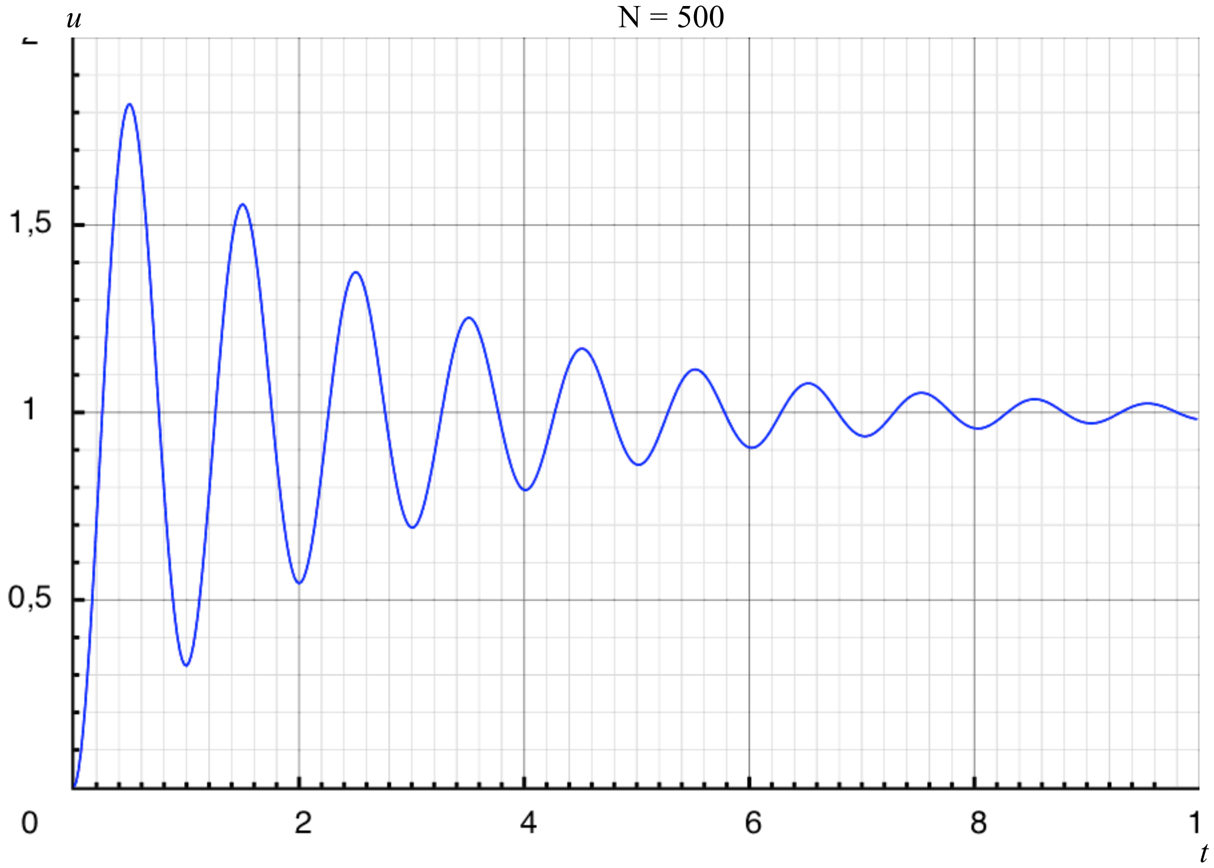
NB : utiliser un traceur de courbe et faire varier T_e de 0,01 à 0,3s par exemple.

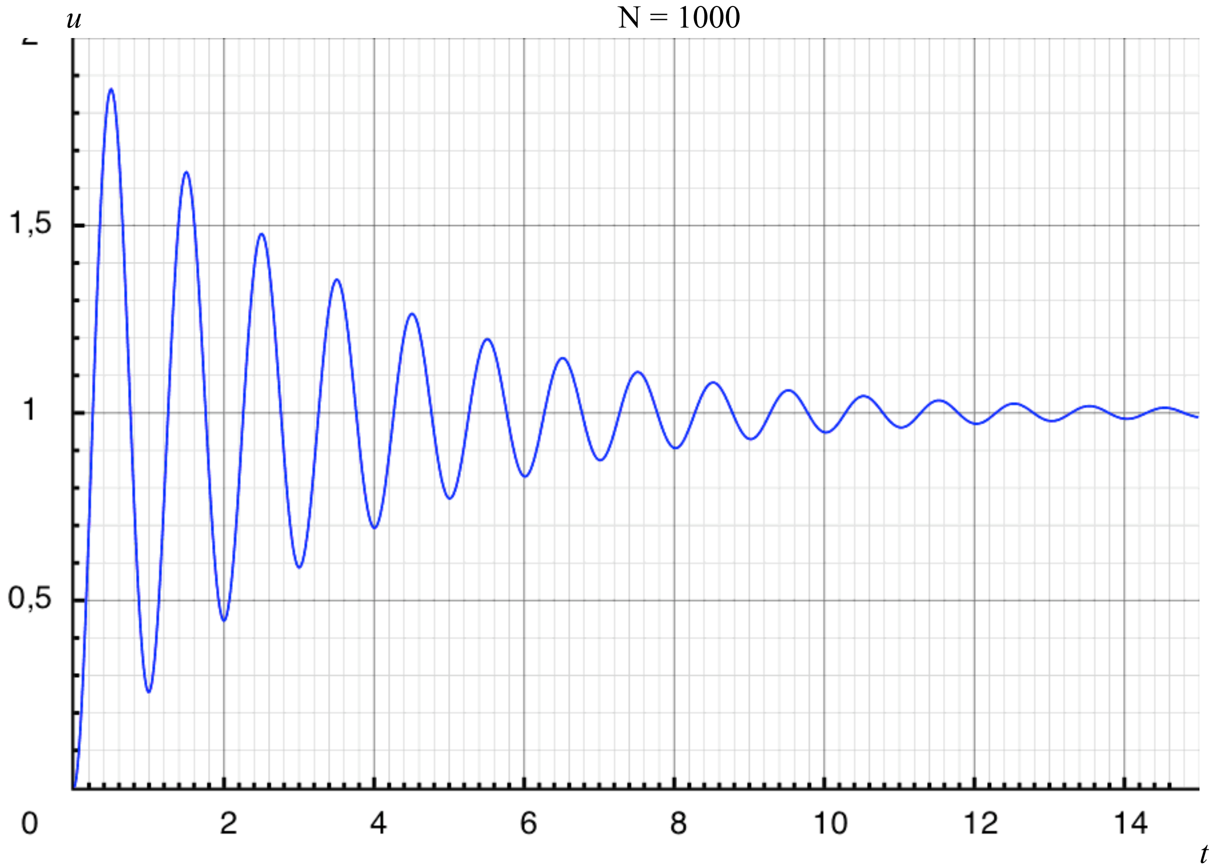
ISBN 978-2-9520781-1-5

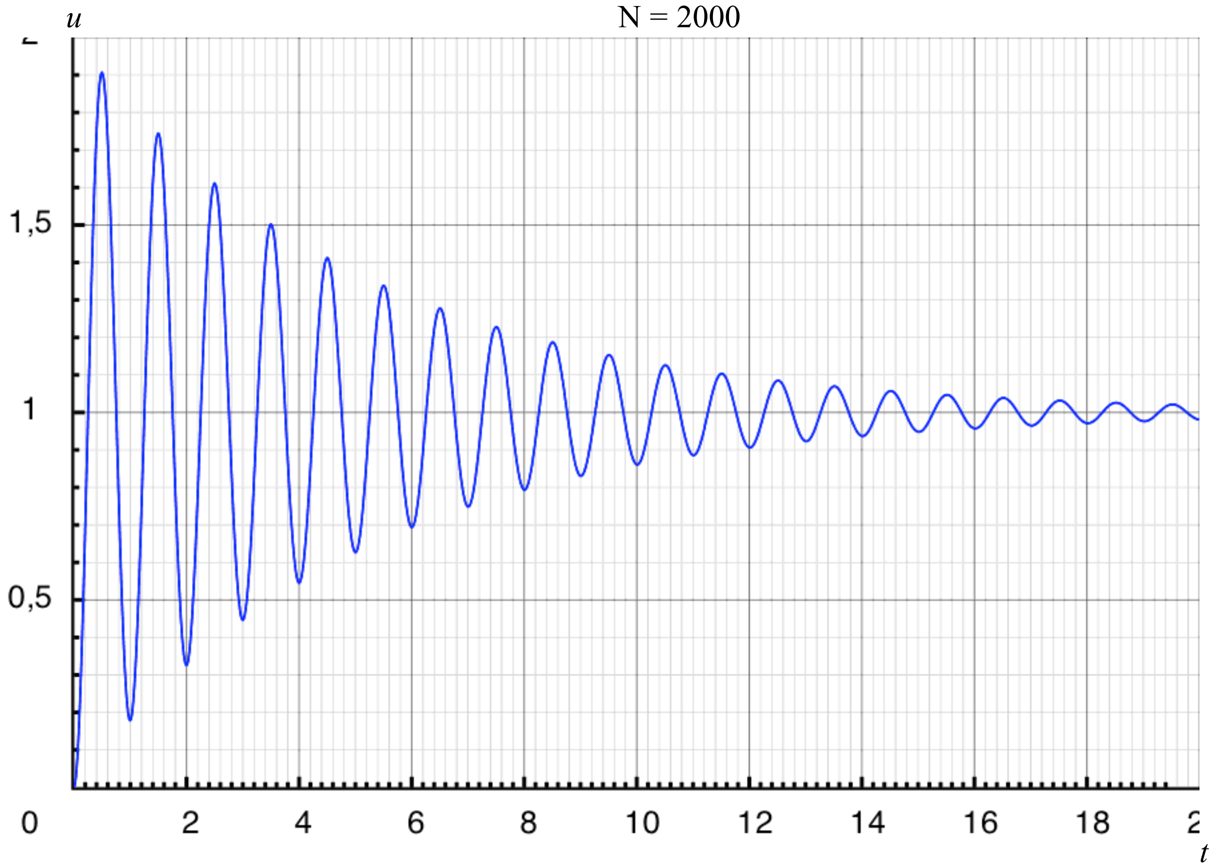


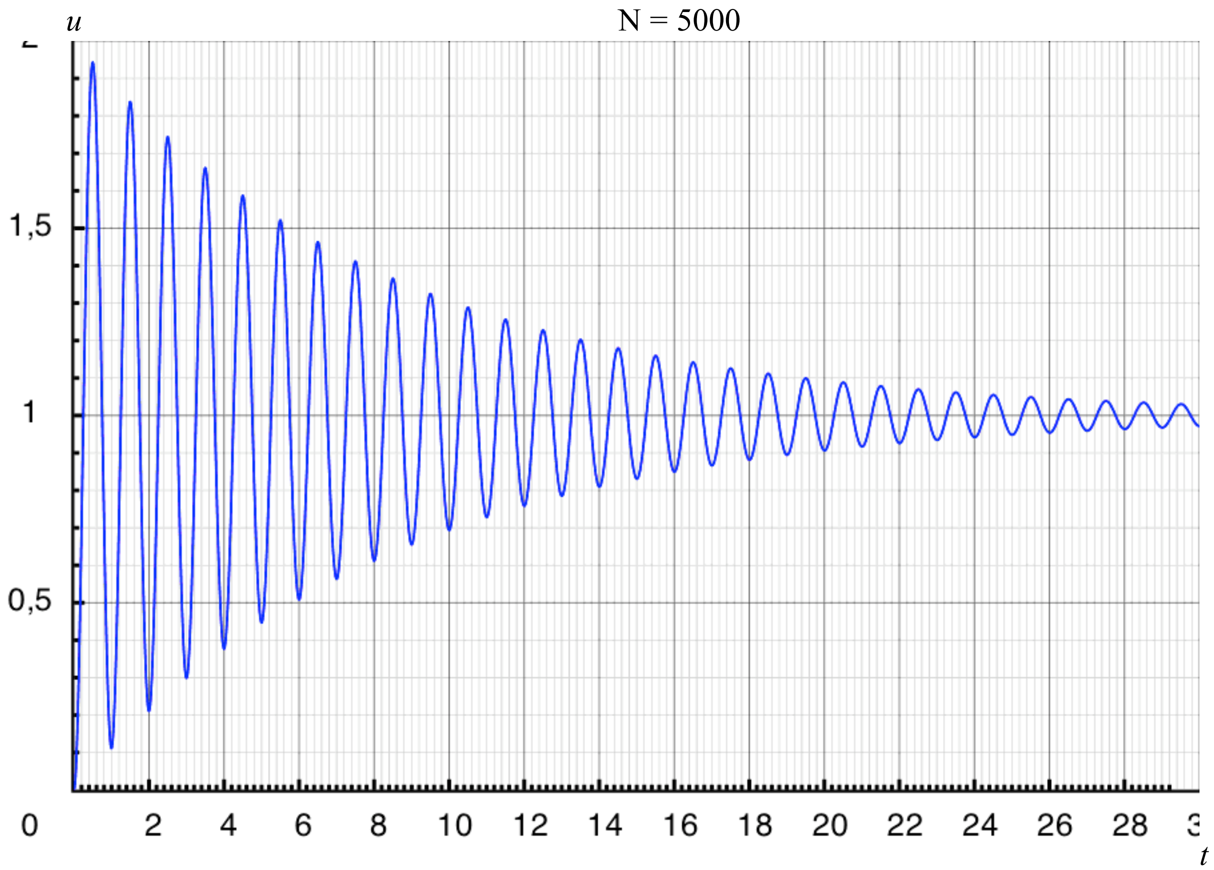


ISBN 978-2-9520781-1-5 http://www.syscope.net


u
N = 500
1,5
1
0,5
0
2
4
6
8
1
t


u
N = 1000
1,5
1
0,5
0
2
4
6
8
10
12
14
t


u
N = 2000
1,5
1
0,5
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
t


u
N = 5000
1,5
1
0,5
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
22
24
26
28
t

REPONSES

1°) $$\frac{du}{dt} \rightarrow \frac{u(k)-u(k-1)}{T_e}$$ (T_e : période d'échantillonnage)

$$\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{d\left(\frac{du}{dt}\right)}{dt} \rightarrow \frac{\frac{u(k)-u(k-1)}{T_e} - \frac{u(k-1)-u(k-2)}{T_e}}{T_e} = \frac{u(k)-2u(k-1)+u(k-2)}{T_e^2}$$

2°) a) Equation aux différences :

$$\left(\frac{\tau}{T_e}\right)^2 \big(u(k)-2u(k-1)+u(k-2)\big) + 2m\frac{\tau}{T_e}\big(u(k)-u(k-1)\big) + u(k) = v(k)$$

$$\Leftrightarrow \big(u(k)-2u(k-1)+u(k-2)\big) + 2m\frac{T_e}{\tau}\big(u(k)-u(k-1)\big) + \left(\frac{T_e}{\tau}\right)^2 u(k) = \left(\frac{T_e}{\tau}\right)^2 v(k)$$

$$\Leftrightarrow \left(1+2m\frac{T_e}{\tau}+\left(\frac{T_e}{\tau}\right)^2\right)u(k) - 2\left(1+m\frac{T_e}{\tau}\right)u(k-1) + u(k-2) = \left(\frac{T_e}{\tau}\right)^2 v(k)$$

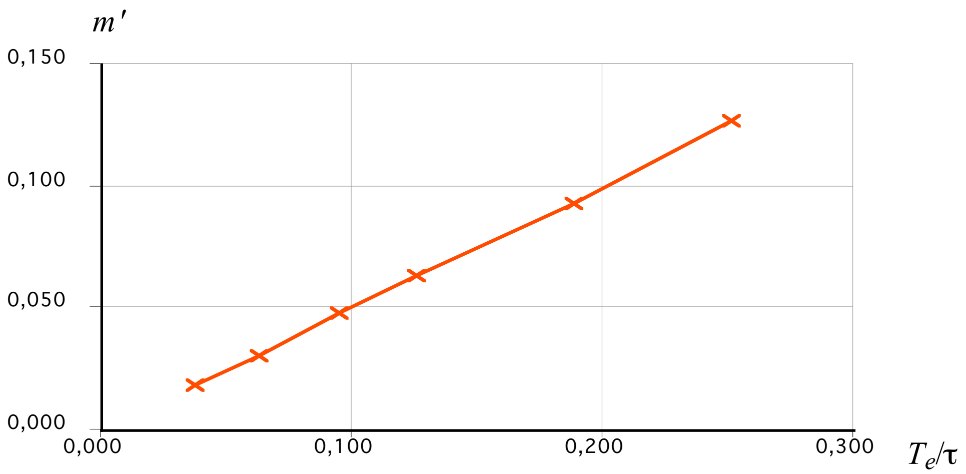
b) Equation de récurrence :

$$u(k) = \frac{\left(\frac{T_e}{\tau}\right)^2 v(k) + 2\left(1+m\frac{T_e}{\tau}\right)u(k-1) - u(k-2)}{1+2m\frac{T_e}{\tau}+\left(\frac{T_e}{\tau}\right)^2}$$

3°)

a)

N	T [s]	T_e [s]	D [%]	τ_p [s]	m'	T_e/τ
100	4	0,040	68	1,25	0,127	0,251
200	6	0,030	75	1,7	0,094	0,188
500	10	0,020	82	2,5	0,064	0,126
1000	15	0,015	86	3,3	0,048	0,094
2000	20	0,010	90	5,2	0,031	0,063
5000	30	0,006	94	8,5	0,019	0,038



ISBN 978-2-9520781-1-5

On trouve expérimentalement que $m' \approx \dfrac{1}{2}\dfrac{T_e}{\tau}$

4°) De l'équation de récurrence on tire :

a) $\underline{U} = \dfrac{\left(\dfrac{T_e}{\tau}\right)^2 \underline{V} + 2\left(1 + m\dfrac{T_e}{\tau}\right)e^{-j\omega T_e}\underline{U} - e^{-2j\omega T_e}\underline{U}}{1 + 2m\dfrac{T_e}{\tau} + \left(\dfrac{T_e}{\tau}\right)^2}$

$$\underline{T} = \frac{\underline{U}}{\underline{V}} = \frac{\left(\dfrac{T_e}{\tau}\right)^2}{1 + 2m\dfrac{T_e}{\tau} + \left(\dfrac{T_e}{\tau}\right)^2 - 2\left(1 + m\dfrac{T_e}{\tau}\right)e^{-j\omega T_e} + e^{-2j\omega T_e}}$$

b) Si $m = 0$, l'expression de la fonction de transfert se simplifie :

$$\underline{T} = \frac{\underline{U}}{\underline{V}} = \frac{\left(\dfrac{T_e}{\tau}\right)^2}{1 + \left(\dfrac{T_e}{\tau}\right)^2 - 2e^{-j\omega T_e} + e^{-2j\omega T_e}}$$

Soit encore :

$$\Rightarrow \underline{T} = \frac{\left(\dfrac{T_e}{\tau}\right)^2}{1 + \left(\dfrac{T_e}{\tau}\right)^2 - 2\cos\omega T_e + \cos 2\omega T_e + j\left(2\sin\omega T_e - \sin 2\omega T_e\right)}$$

D'où le gain :

$$G = 20\log\frac{\left(\dfrac{T_e}{\tau}\right)^2}{\sqrt{\left(1 + \left(\dfrac{T_e}{\tau}\right)^2 - 2\cos\omega T_e + \cos 2\omega T_e\right)^2 + \left(2\sin\omega T_e - \sin 2\omega T_e\right)^2}} \qquad \text{avec } \omega = 2\pi f$$

Pour T_e variant de 0,01 à 0,3s par pas de 0,02s , on obtient les courbes de gain suivantes.

Pour T_e faible (T_e = 0,01s ≈ τ/16), le système est peu amorti (m' ≈ 0,03).

Pour T_e fort (T_e = 0,3 s ≈ 2τ) le système est amorti (m' ≈ 1).

On remarque d'autre part que l'approximation par équation aux différences de l'équation différentielle d'origine fonctionne d'autant mieux que T_e est faible, mais qu'en tout état de cause, au-delà de la fréquence de Shannon, celle-ci devient fausse :

Pour T_e = 0,01s, F_e = 100 Hz ⇒ $F_{\max}$ = 50 Hz

Pour T_e = 0,03s, F_e = 33 Hz ⇒ $F_{\max}$ = 16 Hz *(indiquée sur la figure)*

Pour T_e = 0,05s, F_e = 20 Hz ⇒ $F_{\max}$ = 10 Hz

...

Pour $T_e = 0{,}3$ s, $F_e \approx 3{,}3$ Hz $\Rightarrow F_{\max} = 1{,}6$ Hz