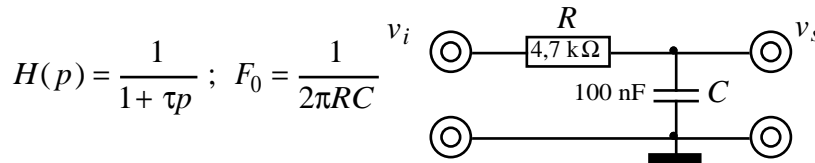


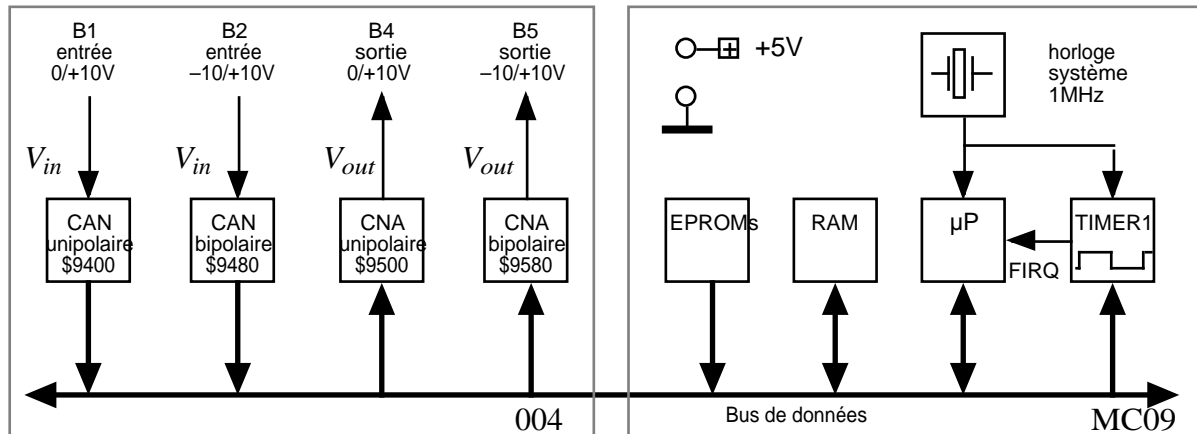
## B21 - Discrétisation

But : discrétiser **en temps réel** un signal analogique...

Matériel : système analogique identique au TP A14 :



Système numérique identique aux TP B15, B22, B23 :



### I- Contrôle de la période d'échantillonnage

**!** Pour réaliser un filtre numérique (et, d'une manière générale, tout type de traitement numérique du signal), il est capital de contrôler avec précision la période avec laquelle les échantillons successifs du signal d'entrée  $v_e(t)$  sont acquis, car  $T_e$  est au système numérique ce que  $\tau$  est au système analogique : le paramètre fondamental ! Or la méthode par temporisation logicielle vue précédemment (TP B15-B17) présente de nombreux inconvénients. Il suffit par exemple de modifier une ligne de programme pour que  $T_e$  soit modifiée.

Si l'on veut que la période d'échantillonnage soit indépendante de la vitesse avec laquelle le programme est exécuté, il faut disposer d'un circuit supplémentaire jouant le rôle de "base de temps" (*timer*). Ici, ce rôle est rempli par un circuit spécialisé, le temporisateur programmable 6840 (TIMER1 sur le schéma ci-dessus), qui génère des impulsions à intervalle fixé vers l'entrée FIRQ du  $\mu P$  (FIRQ : *Fast Interrupt Request* - demande d'interruption rapide). Cet intervalle de temps est la période d'échantillonnage.

Dans ce type de fonctionnement, appelé "programmation par interruptions" ou "par événements" ou encore "programmation temps réel", le  $\mu P$  exécute une boucle d'attente. Lorsqu'il reçoit une impulsion sur son entrée FIRQ, l'exécution est dérivée vers un "sous-programme d'interruption", qui exécute l'algorithme désiré. Dès que ce calcul est terminé, le  $\mu P$  retourne dans sa boucle d'attente.

```

$AC73      * Programme : recopie le signal d'entrée avec contrôle
           * de la période d'échantillonnage Te
$0F00      * Entrée NH (MSB)
$0F01      * Entrée NB (LSB)
           * NH:NB = Te - 1 μs
           * Entrée analogique : borne B2, [-10V,+10V]
           * Sortie analogique : borne B5, [-10V,+10V]
    
```

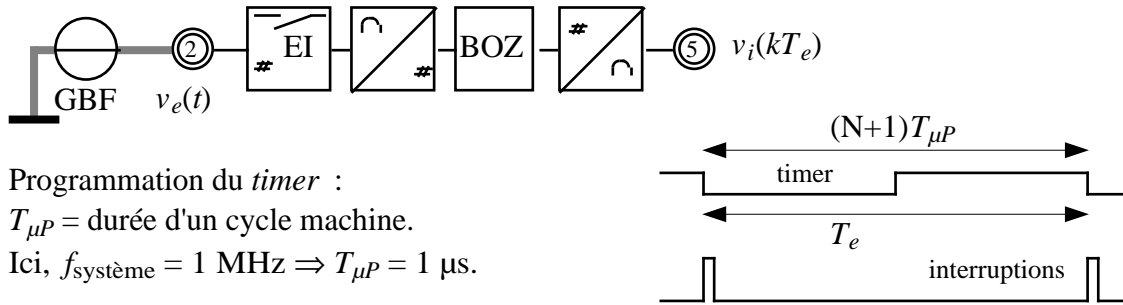
```

Programme principal :
    Initialiser TIMER1
    Boucle :
    
```

```

    Aller à Boucle
    Jusqu'à ordre de fin
    Sous-programme d'interruption :
    Préchargement TIMER1
    Acquisition de Ve(k) sur le CAN
    Vs(k) = Ve(k)
    Sortie de Vs(k) vers le CNA
    Retour de sous-programme
    
```

Ce programme fait une simple recopie du signal  $v(t)$ . Il est équivalent à un Echantillonneur Instantané (EI) suivi d'un Bloqueur d'Ordre Zéro (BOZ) :



Programmation du *timer* :  
 $T_{\mu P}$  = durée d'un cycle machine.  
 Ici,  $f_{\text{système}} = 1 \text{ MHz} \Rightarrow T_{\mu P} = 1 \mu\text{s}$ .

Exemple : on veut  $F_e = 10\text{kHz} \Rightarrow T_e = 100\mu\text{s} \Rightarrow N = 99 = \$0063 \Rightarrow$  adresses  $[0F00] = \$00$  :  $[0F01] = \$63$ . Remplir ces deux adresses (MEM 0F00 00 INC 63 FIN). Exécuter le programme (EXC AC73).

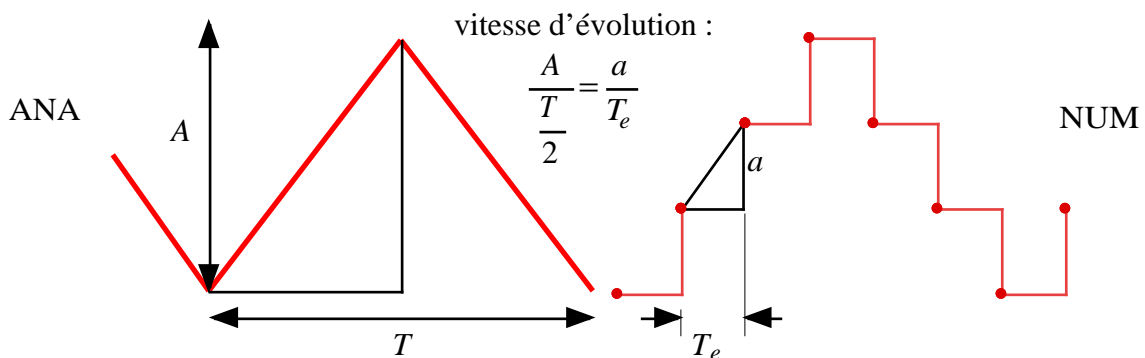
$v_e(t)$  est une tension triangulaire d'amplitude crête à crête  $A = 20\text{V}$  (= PE, pleine échelle). Vérifier que la période d'échantillonnage est bien de  $100\mu\text{s}$ .

**II- Influence de la fréquence d'échantillonnage sur la résolution pratique**

Calculer la résolution *théorique*  $q$  du système d'après :  $q = \frac{A}{2^{n-1}}$  ( $n$  nb de bits du système, ici 8).

Relever  $v_i(t)$  pour différentes fréquences de  $v_e(t)$  :  $F_e/2$  (fréquence de Shannon),  $F_e/4$ ,  $F_e/8$ .

On sait que les vitesses d'évolution des signaux analogique et numérique sont identiques :



En déduire, dans chaque cas, la valeur de la résolution *a pratique*.

Quelle doit être la valeur maximale de la fréquence du signal analogique (en fonction de  $F_e$ ) pour avoir  $a = q$  sachant que  $n = 8$  ?

**III- Mise au point de l'algorithme d'acquisition**

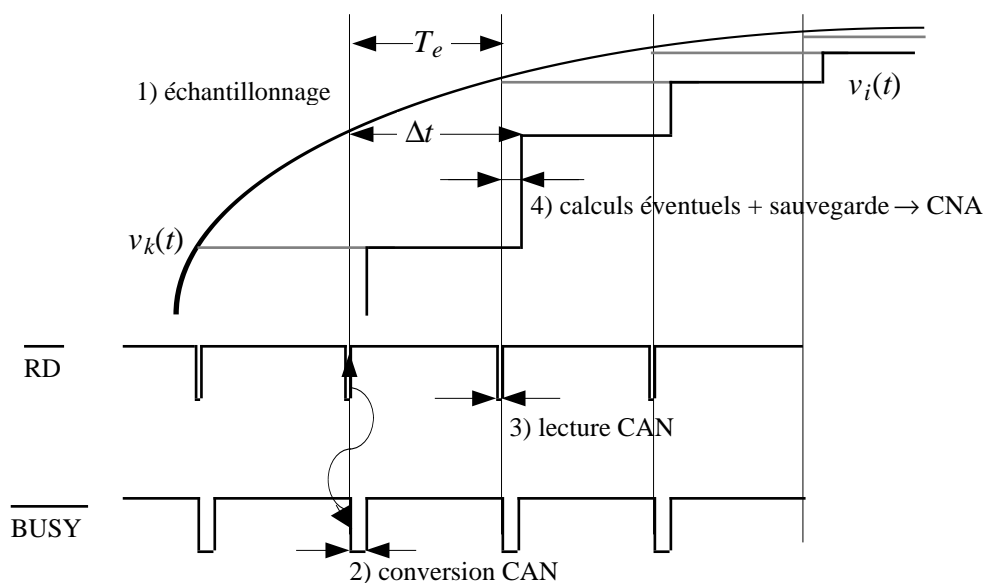
a) Soit  $T_e = 100\mu\text{s}$ . Sur le montage et avec le programme précédents, mesurer le retard  $\Delta t$  (ou "temps d'acquisition") de  $v_i$  par rapport à  $v_e$  (méthode : mesure directe de  $\Delta t$  à l'oscilloscope).

Evaluer  $\Delta t$  en fonction de  $T_e$ .

**!** Problème : le système numérique introduit un retard  $\Delta t$  non négligeable, supérieur à une période d'échantillonnage. Si le système était inséré dans une boucle, il en découlerait un décalage temporel entre la consigne et la mesure : on ne pourrait parler d'échantillonnage "instantané". Tout se passe comme si on comparait la consigne du jour avec la mesure de la veille !

Dans le programme \$AC73, le sous-programme d'interruption qui effectue l'acquisition du signal par le CAN et le restitue par le CNA est détaillé ci-dessous. Le retard apporté par le système numérique découle du chronogramme de l'acquisition de données.

BF 88 02	acqu	STX	drtim1	démarrage	décompteur
B6 94 80		LDA	can_bi	transfert	CAN -> CNA
B7 95 80		STA	cna_bi		
3B		RTI		retour	d'interruption



Le CAN reçoit sur son entrée  $\overline{\text{RD}}$  un zéro logique pendant un cycle machine ( $1\mu\text{s}$ ) au cours de l'exécution de l'instruction de lecture du CAN (`LDA can_bi`). Or le signal de commande  $\overline{\text{RD}}$  (READ) du CAN est tel que (*rappel : voir TP B12-B13 CAN/CNA pour les signaux de contrôles  $\overline{\text{RD}}$  et  $\overline{\text{BUSY}}$* ) :

- un front montant de  $\overline{\text{RD}}$  déclenche une conversion. Le résultat de cette conversion est mis en mémoire dans le registre de sortie du CAN.

- lorsque  $\overline{\text{RD}} = 0$ , le contenu de ce registre (résultat de la conversion précédente) est présent sur le bus de sortie du CAN ( $\Rightarrow$  lecture du CAN)

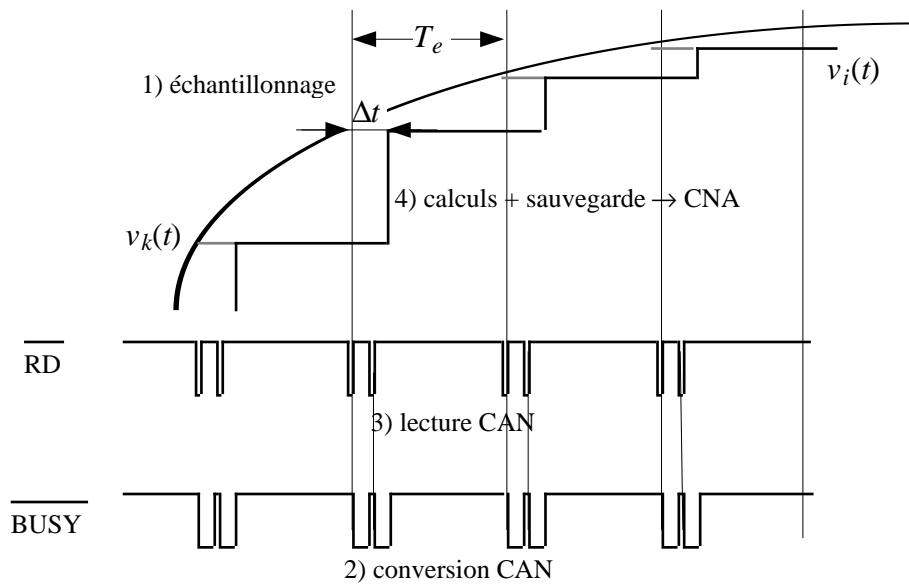
- lorsque  $\overline{\text{RD}} = 1$ , la sortie du CAN est déconnectée (état haute impédance)

**b)** On modifie donc le sous-programme d'acquisition comme suit : une première exécution de l'instruction `LOAD (LDA can_bi)` déclenche une conversion. Après un délai un peu supérieur au temps de conversion du CAN, une deuxième exécution de cette instruction permet de lire le résultat de cette conversion (et en déclenche une seconde, qui reste inutilisée).

Exécuter le programme d'adresse \$AF00, valeur hexadécimale de  $T_e = 100 \mu\text{s}$  à l'adresse \$0F00:0F01 comme d'habitude. Evaluer de nouveau le retard  $\Delta t$  en fonction de  $T_e$ .

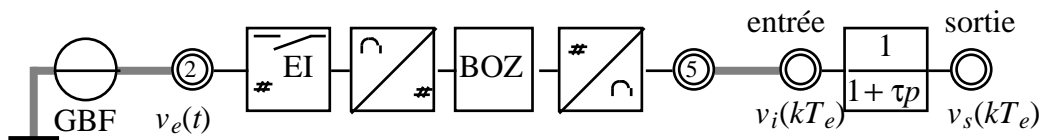
A.N. : si l'on veut que  $\Delta t < T_e/100$ , avec  $a = q$  pour  $n = 8$ , quelle devraient être les valeurs maximales de  $F_e$  et de la fréquence  $f_{\text{max}}$  du signal ?

BF 88 02	acqbis	STX	drtim1	démarrage décompteur	5µs  + 8 x 2 + 5 + 5 = 31 µs
B6 94 80		LDA	can_bi	lancement conversion	
12		NOP		délai d'attente de	
12		NOP		fin de conversion :	
12		NOP			
12		NOP			
12		NOP			
12		NOP			
12		NOP			
12		NOP			
B6 94 80		LDA	can_bi	lecture CAN	
B7 95 80		STA	cna_bi	transfert CAN -> CNA	
3B		RTI			



$\Delta t =$   
*temps d'exécution des instructions à vérifier sur la table de programmation du µP 6809 (colonne ~)*

**IV- Application : influence de l'échantillonnage sur le comportement en fréquence d'un système du 1er ordre**



$v_e(t)$  est maintenant une tension sinusoïdale d'amplitude crête à crête  $\leq 20V$ . On observe  $v_s(t)$ .

a) Tracer au tableur, la courbe  $G(f) = 20\log|H(p)|$ , en échelle semi-log, pour  $0,1F_0 \leq f \leq 10F_0$ .

b) Exécuter le programme \$AF00. Soit  $T_e = 0,7\tau$  puis  $0,1\tau$ . Relever dans chaque cas la courbe de gain du système sur le graphe précédent ( $0,1F_0 \leq f \leq 10F_0$ ). Conclusion.

c) *Calculs théoriques :*

- connaissant  $H(p)$ , établir l'expression de  $H_B(z)$  (cf table transf. z §B22). On pose :  $\alpha = e^{-T_e/\tau}$ .

- sachant que  $z = e^{j\omega T_e} = \cos \omega T_e + j \sin \omega T_e$ , montrer que :  $|H_B(j\omega)| = \frac{1 - \alpha}{\sqrt{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos \omega T_e}}$

- en déduire la fréquence de coupure à  $-3dB$  pour  $T_e = 0,1\tau$ .

Rappel :  $G = 20\log|H_B| = -3 \Leftrightarrow |H_B(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$

## Commentaires

### I- Contrôle de la période d'échantillonnage

```

* - recopie le signal d'entrée avec contrôle de
* la période d'échantillonnage Te
* - Te = $Δt+1 μs , $Δt valeur hexa écrite sur
* 2 octets, poids fort, poids faible
* => 1μs ($Δt = $0000) < Te < 65ms ($FFFF)
* - entrée : éch : [$00,$FF] <-> [+10V,-10V]
* CAN : borne 2
* - sortie : éch : [$00,$FF] <-> [+10V,-10V]
* CNA : borne 5
*
* $0F00:0F01 : période d'échantillonnage ($Δt)
*

```

AC73 30 8D 00 10	prog50	LEAX	spg50,PCR	adr s-p d'interruption
AC77 BF 0F 66		STX	vfirq	vecteur d'interruption
AC7A 86 F2		LDA	#\$F2	initialisation TIMER 1
AC7C BE 0F 00		LDX	\$0F00	
AC7F BD A8 80		JSR	itimer	
AC82 3C BF	loop50	CWAI	##%10111111	autorisation et attente
AC84 20 FC		BRA	loop50	d'interruption
AC86 3F		SWI		
AC87 BF 88 02	spg50	STX	drtim1	démarrage décompteur
AC8A B6 94 80		LDA	can_bi	transfert CAN -> CNA
AC8D B7 95 80		STA	cna_bi	
AC90 3B		RTI		retour d'interruption

### II- Influence de la fréquence d'échantillonnage sur la résolution pratique

On donne :

$f$  : fréquence du signal analogique  $v_e(t)$

$A = 20 \text{ V}$  : amplitude crête-à-crête de  $v_e(t)$ , qui correspond à la pleine échelle du CAN

$F_e = 1/T_e = 10 \text{ kHz}$  : fréquence d'échantillonnage

$a$  : résolution constatée du signal échantillonné  $v_i(t)$

La résolution théorique du CAN est :  $q = \frac{A}{2^n - 1} = \frac{20}{255} \approx 78 \text{ mV}$

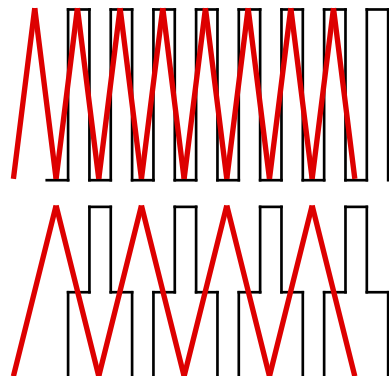
On sait que :  $\frac{A}{\frac{T}{2}} = \frac{a}{T_e} \Leftrightarrow 2f A = F_e a$ , d'où :

$$f = \frac{F_e}{2}$$

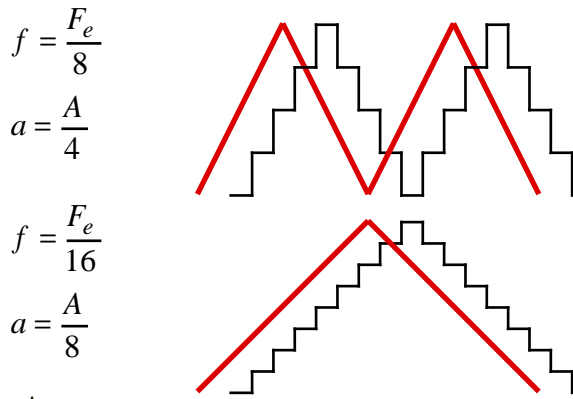
$$a = A$$

$$f = \frac{F_e}{4}$$

$$a = \frac{A}{2}$$



signal analogique  $v_e(t)$  : ———  
 signal échantillonné  $v_i(t)$  : ———  
 période d'échantillonnage :  $\dashv$   $T_e = 100 \mu\text{s}$



Si l'horloge du microprocesseur qui génère le signal d'échantillonnage et celle du GBF qui génère  $v_e(t)$  ne sont pas synchronisées, un phénomène de battements rend l'observation délicate vers les hautes fréquences.

La précision maximale est atteinte quand  $a = q$ . Pour cela il faut que la fréquence du signal à échantillonner n'excède pas 20 Hz (pour une fréquence d'échantillonnage de 10 kHz !):

$$\left. \begin{array}{l} 2fA = F_e a \\ a = q \\ q = \frac{A}{2^n - 1} \end{array} \right\} \Rightarrow 2fA = F_e \frac{A}{2^n - 1} \Rightarrow f_{\max} \approx \frac{F_e}{2^{n+1}} = \frac{F_e}{512} \approx 20\text{Hz}$$

### III- Mise au point de l'algorithme d'acquisition

a) On constate un retard moyen d'environ une période d'échantillonnage et demi (cf figures ci-dessus) :  $\Delta t \approx 150 \mu\text{s}$

```
*      - recopie le signal d'entrée avec contrôle de
*      la période d'échantillonnage Te
*      - Te = $Δt+1 μs , $Δt valeur hexa écrite sur
*      2 octets, poids fort, poids faible
*      => 1μs ($Δt = $0000) < Te < 65ms ($FFFF)
*      - entrée : éch : [$00,$FF] <-> [+10V,-10V]
*      CAN : borne 2
*      - sortie : éch : [$00,$FF] <-> [+10V,-10V]
*      CNA : borne 5
*
* $0F00:0F01 : période d'échantillonnage ($Δt)
*
```

```
AF00          ORG      $AF00
AF00 30 8D 00 10      prog51 LEAX   spg51,PCR      adr s-p d'interruption
AF04 BF 0F 66          STX    vfirq          vecteur d'interruption
AF07 86 F2            LDA    #$F2          initialisation TIMER 1
AF09 BE 0F 00          LDX   $0F00
AF0C BD A8 80          JSR   itimer
AF0F 3C BF            loop51 CWAI  #%10111111  autorisation et attente
AF11 20 FC            BRA   loop51          d'interruption
AF13 3F              SWI
```

\* sous-programme d'acquisition modifié :

```
AF14 BF 88 02      spg51 STX    drtim1      démarrage décompteur
AF17 B6 94 80      LDA    can_bi          lancement conversion CAN
AF1A 12            NOP                    attente fin conversion CAN
```

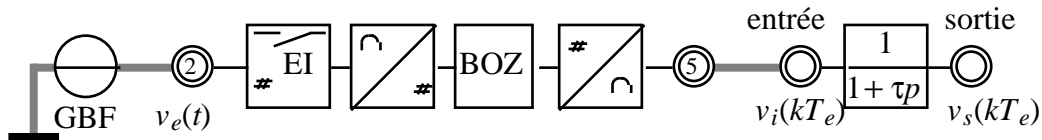
AF1B	12	NOP		
AF1C	12	NOP		
AF1D	12	NOP		
AF1E	12	NOP		
AF1F	12	NOP		
AF20	12	NOP		
AF21	12	NOP		5 + 8x2 = 21µs
AF22	B6 94 80	LDA	can_bi	lecture CAN
AF25	B7 95 80	STA	cna_bi	transfert CAN -> CNA
AF28	3B	RTI		retour d'interruption

b) On mesure :  $\Delta t \approx 30 \mu s$ . Pour pouvoir négliger ce retard (impossible à supprimer, car il est inhérent à l'exécution du programme), on se donne la condition supplémentaire :  $\Delta t < T_e/100$ . Ce qui entraîne les valeurs suivantes :

$$T_e > 100\Delta t \Rightarrow F_e < \frac{1}{100 \cdot 30 \cdot 10^{-6}} \approx 330 \text{ Hz} \Rightarrow f_{\max} < \frac{F_e}{512} \approx 0,65 \text{ Hz}$$

Conclusion : un échantillonnage précis et instantané nécessite que le processeur ait une fréquence système très grande devant la fréquence du signal ! (ici  $F_e > 51200 f_{\max}$  !)

**IV- Application : influence de l'échantillonnage sur le comportement en fréquence d'un système du 1er ordre**



$v_e(t)$  est maintenant une tension sinusoïdale d'amplitude crête à crête  $\leq 20V$ . On observe  $v_s(t)$ .

a) Rappel :  $G(f) = 20 \log |H(p)| = 20 \log \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{F_0}\right)^2}}$

$$\tau = RC = 4700 \cdot 100 \cdot 10^{-9} = 0,47 \text{ ms} ; F_0 = \frac{1}{2\pi RC} \approx 340 \text{ Hz}$$

b) Courbes : dans chaque cas, on peut calculer la fréquence de Shannon en fonction de  $F_0$  d'après :

$$f_{\max} = \frac{F_e}{2} = \frac{1}{2T_e} \text{ et } F_0 = \frac{1}{2\pi\tau} \Rightarrow \tau = \frac{1}{2\pi F_0}$$

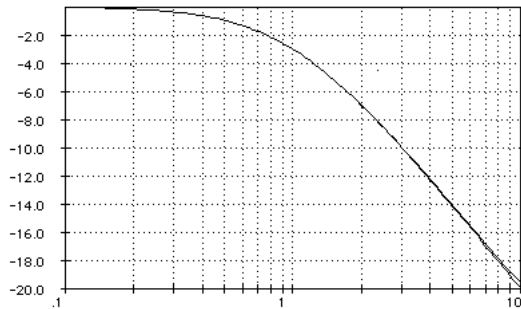
**⚠** Au-delà de  $f_{\max}$ , les courbes obtenues n'ont plus de signification en tant que gain d'un filtre passe-bas, puisque le signal de sortie n'a plus la même fréquence que le signal d'entrée (par effet "stroboscopique" - cf cours) !

Conclusion : plus la fréquence d'échantillonnage diminue, plus l'approximation numérique du filtre passe-bas s'éloigne du modèle analogique.

(courbes page suivante)

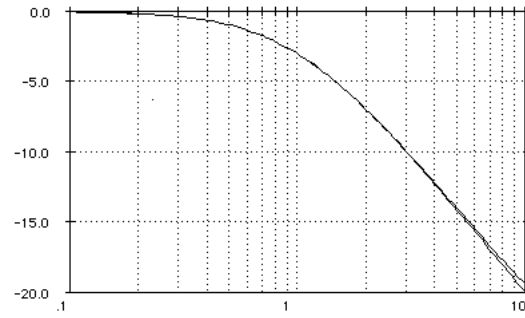
$T_e = 0,1\tau = 47 \mu\text{s} \Rightarrow N = 46 = \$002E :$

$$f_{\max} = \frac{2\pi F_0}{2.0,1} \approx 31F_0$$



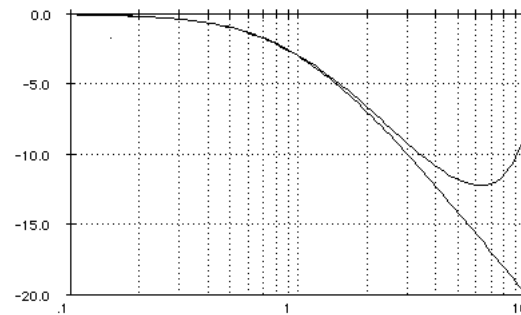
$T_e = 0,125\tau = 59 \mu\text{s} \Rightarrow N = 58 = \$003A :$

$$f_{\max} = \frac{2\pi F_0}{2.0,125} \approx 25F_0$$



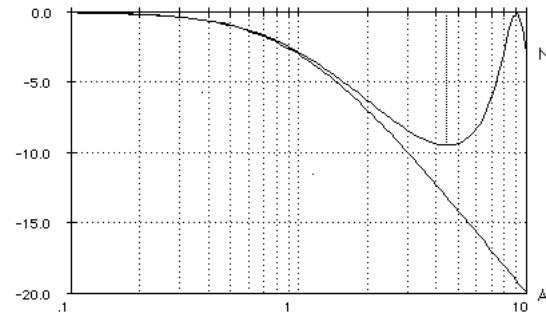
$T_e = 0,5\tau = 235 \mu\text{s} \Rightarrow N = 234 = \$00EA :$

$$f_{\max} = \frac{2\pi F_0}{2.0,5} \approx 6,3F_0$$



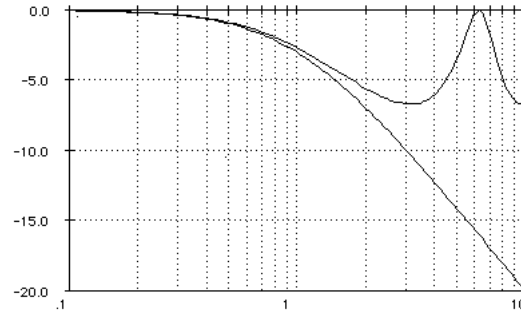
$T_e = 0,7\tau = 329 \mu\text{s} \Rightarrow N = 328 = \$0148 :$

$$f_{\max} = \frac{2\pi F_0}{2.0,7} \approx 4,5F_0$$



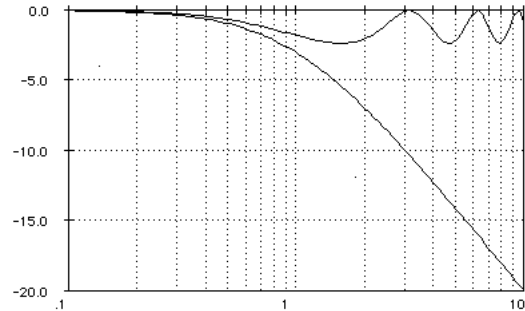
$T_e = \tau = 470 \mu\text{s} \Rightarrow N = 469 = \$01D5 :$

$$f_{\max} = \frac{2\pi F_0}{2} \approx 3,1F_0$$



$T_e = 2\tau = 940 \mu\text{s} \Rightarrow N = 939 = \$03AB :$

$$f_{\max} = \frac{2\pi F_0}{2.2} \approx 1,6F_0$$



c)

$$H(p) = \frac{1}{1 + \tau p} \Rightarrow H_B(z) = \mathbf{Z}[H_B(p)] = (1 - z^{-1}) \cdot \mathbf{Z}\left[\frac{H(p)}{p}\right] = \frac{(1 - \alpha)z^{-1}}{1 - \alpha z^{-1}} = \frac{1 - \alpha}{z - \alpha} \quad \text{avec } \alpha = e^{-\frac{T_e}{\tau}}$$

$$z = e^{j\omega T_e} = \cos \omega T_e + j \sin \omega T_e \Rightarrow H_B(j\omega) = \frac{1 - \alpha}{\cos \omega T_e - \alpha + j \sin \omega T_e}$$

$$\Rightarrow |H_B(j\omega)| = \frac{1 - \alpha}{\sqrt{(\cos \omega T_e - \alpha)^2 + \sin^2 \omega T_e}} = \frac{1 - \alpha}{\sqrt{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos \omega T_e}}$$

$$|H_B(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ pour } \frac{(1 - \alpha)^2}{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos \omega T_e} = \frac{1}{2} \Rightarrow F_c = \frac{F_e}{2\pi} \arccos \frac{-\alpha^2 + 4\alpha - 1}{2\alpha}$$

A.N. :  $T_e = 0,1\tau \Rightarrow F_e \approx 21,3 \text{ kHz} ; \alpha \approx e^{-0,1} \approx 0,905 \Rightarrow F_c \approx 340 \text{ Hz}$ , ce qui est conforme au modèle analogique ( $F_c = F_0 = 340 \text{ Hz}$ ).