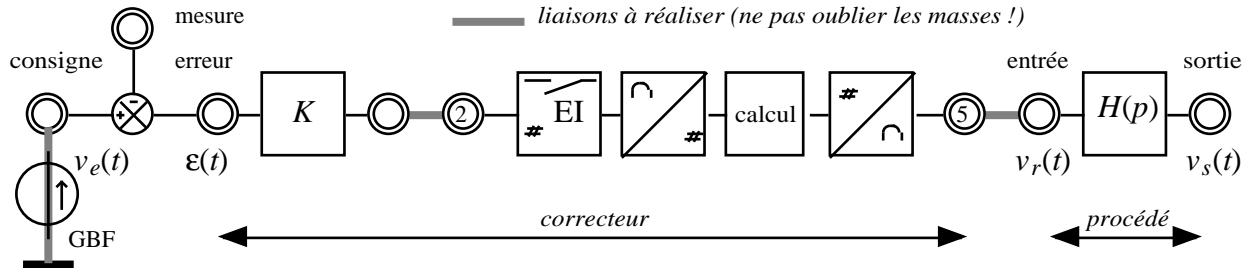


B22 - Transformée en z

But : réaliser par voie numérique la fonction régulateur analogique (P, I, PI) étudiée précédemment (voir partie A du programme, TP A22) à l'aide des techniques de Traitement Numérique des Signaux exposés dans le cours (cf §B22).

Le plan du TP est identique au TP A22, 1ère partie (on se limite ici à la correction numérique d'un système analogique du 1er ordre).

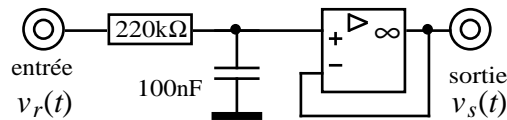
Matériel :



- Système analogique à corriger : on considère un système électrique dont la fonction de transfert $H(p)$, du premier ordre avec $\tau = R.C = 22\text{ms}$ est connue :

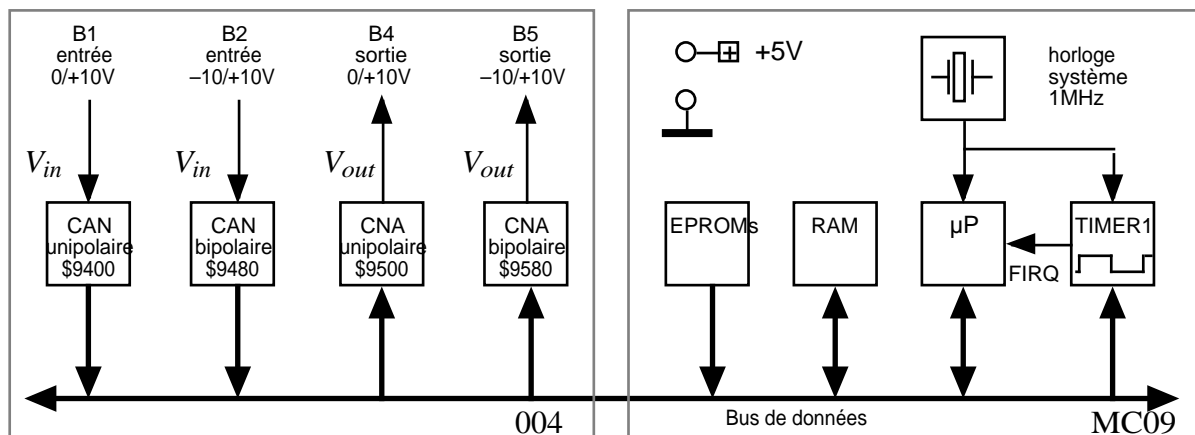
$$H(p) = \frac{V_s(p)}{V_r(p)} = \frac{1}{1 + \tau p}$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\tau}$$



- Comparateur : on dispose d'un comparateur analogique à AOP (cf TP A21) qui exécute l'opération $v(t) = K(v_s - v_e) = K.\epsilon$, où v_e est la "consigne" (signal d'entrée), v_s la "mesure" (signal de sortie). Réaliser un amplificateur soustracteur de gain K .

- Correcteur : système numérique identique aux TP B21 et B23 :



On note $C(p)$ la fonction de transfert du correcteur. Dans le TP B21 (discretisation), on montre que le temps Δt d'acquisition et de calcul du système numérique doit être faible devant la période d'échantillonnage pour pouvoir être négligé. C'est pourquoi, pour gagner du temps, on décharge ici le microprocesseur d'une partie des calculs en reportant la multiplication par un coefficient (K) sur le comparateur analogique.

Notations

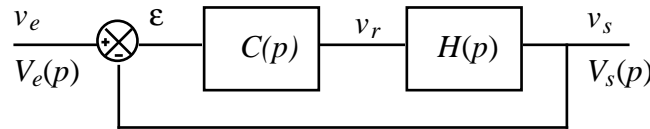
Rappel des notations en analogique (TP A22) :

$H(p)$ fonction de transfert du système à corriger

$C(p)$ fonction de transfert du correcteur

$T(p) = C(p) \cdot H(p)$ fonction de transfert de la chaîne directe en boucle ouverte.

$F(p) = \frac{T(p)}{1+T(p)}$ fonction de transfert en boucle fermée.



En numérique :

$H_B(z)$ fonction de transfert du système analogique à corriger avec BOZ

$C(z)$ fonction de transfert du correcteur numérique

$T(z) = C(z) \cdot H_B(z)$ fonction de transfert de la chaîne directe en boucle ouverte

$F(z) = \frac{T(z)}{1+T(z)}$ fonction de transfert en boucle fermée.

On pose : $\alpha = e^{-T_e/\tau}$.

Dans toute la manipulation, $v_e(t)$ est un signal carré de fréquence comprise entre 5 et 10 Hz. En boucle fermée, relier la sortie v_s à l'entrée de mesure.

I- Etude du système en BF, non corrigé : $C(p) = 1 \Rightarrow v_r(k) = \epsilon(k)$ **Etude théorique :**

a) Exprimer $T(z)$.

b) Exprimer $F(z)$ en fonction de α . On pose : $\lambda = 2\alpha - 1$.

Programmation : exécuter le programme \$AF00 (cf TP B21).

Rappel : pour saisir la période d'échantillonnage T_e , il faut inscrire (à l'aide du clavier) aux adresses \$0F00:\$0F01 (poids fort:poids faible) la quantité hexadécimale correspondant à $T_e - 1 \mu s$.

```

*          - recopie le signal d'entrée avec contrôle de
*          la période d'échantillonnage Te
*          - entrée : éch : [$00,$FF] <-> [+10V,-10V]
*          CAN : borne 2
*          - sortie : éch : [$00,$FF] <-> [+10V,-10V]
*          CNA : borne 5
itimer    EQU    $A880    sous-programme initialisation timer
cna_bi    EQU    $9580    CNA bipolaire -10/+10V (B5)
can_bi    EQU    $9480    CAN bipolaire -10/+10V (B2)
drtiml    EQU    $8802    registre de données timer 1
vfirq     EQU    $0F66    vecteur d'interruption rapide
Te        EQU    $0F00    adresse periode d'echantillonnage

AF00 30 8D 00 10    LEAX    spg5,PCR    adr s-p d'interruption
AF04 BF 0F 66      STX     vfirq        vecteur d'interruption
AF07 86 F2        LDA     #$F2        initialisation TIMER 1
AF09 BE 0F 00      LDX     $0F00
AF0C BD A8 80      JSR     itimer
AF0F 3C BF        loop5  CWAI    #%10111111 autorisation et attente
AF11 20 FC        BRA     loop5      d'interruption
AF13 3F          SWI
AF14 BF 88 02    spg5  STX     drtiml    démarrage décompteur
AF17 B6 94 80    LDA     can_bi      lancement conversion CAN    5 µs
AF1A 12          NOP          attente fin conversion CAN
AF1B 12          NOP
AF1C 12          NOP
AF1D 12          NOP
AF1E 12          NOP
AF1F 12          NOP
AF20 12          NOP
AF21 12          NOP
AF22 B6 94 80    LDA     can_bi      lecture CAN    + 8 x 2
AF25 B7 95 80    STA     cna_bi      transfert CAN -> CNA    + 5

```

Etude expérimentale :

Régler $K = 1$ sur le comparateur. $v_e \approx 2 \text{ V}$ crête à crête.

c) Soit $T_e = 0,125\tau$. Imprimer v_s . Mesurer l'erreur statique ϵ_{01} .

II- Correction proportionnelle P : $C(p) = K \Rightarrow v_r(k) = K.\epsilon(k)$ **Etude théorique :**

a) Exprimer $T(z)$.

b) Exprimer $F(z)$ en fonction de α . On pose : $\lambda = \alpha - K(1 - \alpha)$.

c) On sait (cf cours) que la condition de stabilité est que le module de la racine du dénominateur de F soit inférieure à 1, soit: $|\lambda| < 1 \Rightarrow -1 < K < \frac{1+\alpha}{1-\alpha}$.

Calculer les différentes valeurs limites de K pour $T_e = 0,125\tau$; $0,25\tau$; $0,5\tau$; τ .

Programmation : exécuter le programme \$AF00.

Etude expérimentale de la précision : influence de K

Soit $T_e = 0,125\tau$

d) Imprimer v_s et mesurer l'erreur statique ϵ_{01} pour $K = 1, 2, 4, 8, 16, 32$. Conclusion : à partir de quelle valeur de K le système devient-il instable ?

Etude expérimentale de la stabilité : influence de T_e

Soit $K = 4$.

e) Imprimer v_s pour $T_e = 0,125\tau$; $0,25\tau$; $0,5\tau$; τ . Conclusion : même question.

III- Correction intégrale pure I : $C(p) = \frac{K}{T_i p}$ **Etude théorique :**

a) Exprimer $C(z)$. On pose : $K' = K \cdot \frac{T_e}{T_i}$

b) En déduire l'algorithme de calcul : $v_r(k) = f(\epsilon(k-1), v_r(k-1))$.

c) Exprimer $T(z)$.

d) Exprimer $F(z)$ en fonction de α . On pose : $\lambda = 1 + \alpha - K'(1 - \alpha)$.

Programmation : exécuter le programme \$AF29.

Le début du programme (initialisation) est identique au programme \$AF00. Le sous-programme d'acquisition est modifié comme suit :

AF29 30 8D 00 10	LEAX	spg6,PCR	adr s-p d'interruption	
.../...	.../...			
AF3C 3F	SWI			
AF3D BF 88 02	STX	drtim1	démarrage décompteur	
.../...	.../...			
AF4B B6 94 80	LDA	can_bi	lecture CAN	26 μs
AF4E 88 80	EORA	##10000000	conv bin décalé -> 2's comp	+ 2
AF50 BB 0F 02	ADDA	\$0F02	(variable interne)	+ 5
AF53 B7 0F 02	STA	\$0F02		+ 5
AF56 88 80	EORA	##10000000	conv 2's comp -> bin décalé	+ 2
AF58 B7 95 80	STA	cna_bi	transfert CAN -> CNA	+ 5
AF5B 3B	RTI		total :	$\Delta t = 45\mu\text{s}$

Etude expérimentale de la précision et du temps de réponse

e) On choisit $T_e = 0,125\tau$. En analogique (*TP A22*), on avait choisi $T_i = 10\tau$ et $K = 10$. Calculer K' . Régler K' à cette valeur sur le comparateur.

f) Choisir $5\text{ V} < v_e$ crête à crête $< 10\text{ V}$. Imprimer v_s et mesurer l'erreur statique ϵ_{01} , le dépassement D (en %) et le temps de réponse à 5% t_r . Conclusion.

g) *Stabilité* : on montre (voir cours) que le système est stable tant que $K' < 2 \frac{1+\alpha}{1-\alpha}$. Vérifier expérimentalement ce résultat théorique.

IV- Correction proportionnelle et intégrale PI : $C(p) = K \left(1 + \frac{1}{T_i p} \right)$

Etude théorique :

a) Exprimer $C(z)$

b) En déduire l'algorithme de calcul : $v_r(k) = f(\epsilon(k), \epsilon(k-1), v_r(k-1))$.

c) A.N. : pour limiter la complexité du programme de calcul, on choisit $\alpha = 7/8$. En déduire la valeur de T_e en fonction de τ .

d) Exprimer $T(z)$.

e) On choisit un réglage simple : $\alpha = 1 - \frac{T_e}{T_i}$. En déduire la valeur de T_i en fonction de τ et

l'expression simplifiée de $T(z)$.

f) Exprimer $F(z)$ en fonction de α . On pose : $\lambda = 1 - K(1 - \alpha)$.

g) Calculer la condition de stabilité sur K pour la valeur de T_e calculée en c), sachant que le système est stable si $K < \frac{2}{1-\alpha}$.

Programmation : exécuter le programme \$AF5C.

```

vk_1 EQU $0F02      adresse de Vi(k-1)
ek EQU $0F03        adresse de e(k)
ek_1 EQU $0F04      adresse de e(k-1)
uk_1 EQU $0F05      adresse de u(k-1) = Vi(k-1) - e(k-1) + e(k-1)/7
...
NOP
LDB can_bi          lecture CAN de e(k)
EORB #10000000      binaire decale -> compl. a 2
STB ek              sauv. e(k)
ADDB uk_1           e(k) + u(k-1)
EORB #10000000      compl. a 2 -> binaire decale
STB cna_bi          transfert CAN -> CNA : Vi(k)
LDA vk_1            Vi(k-1)
EORB #10000000      binaire decale -> compl. a 2
STB vk_1            sauv. Vi(k) à la place de Vi(k-1)
SUBA ek_1           Vi(k-1) - e(k-1)
ASR ek_1            /2 avec conservation du signe
ASR ek_1            /2
ASR ek_1            /2
ADDA ek_1           Vi(k-1) - e(k-1) + e(k-1)/8
STA uk_1            sauv. u(k-1)
LDA ek              sauv. e(k) à la place de e(k-1)
STA ek_1
RTI

```

Etude expérimentale de la précision et de la stabilité : influence de K

(NB : ne pas oublier de saisir la valeur hexadécimale de T_e calculée en c)

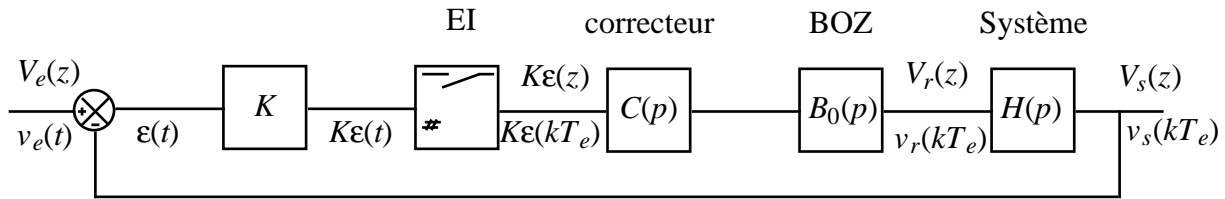
h) Imprimer v_s et mesurer l'erreur statique ϵ_{01} , le dépassement D (en %) et le temps de réponse à 5% t_r pour $K = 1, 2, 4, 8, 16, 32$. Conclusion.

i) Vérifier expérimentalement la valeur maximale de K calculée en g) pour que le système reste stable.

Commentaires

Système (du 1er ordre) à corriger : $H(p) = \frac{V_s(p)}{V_r(p)} = \frac{1}{1 + \tau p}$ avec $\tau = 22 \text{ ms} = 22000 \mu\text{s}$

Schéma bloc du système en boucle fermée, intégrant le Bloqueur d'Ordre Zéro (BOZ) pour tenir compte du retard introduit par l'échantillonnage (voir cours chap. B14 et B22) :



I- Etude du système en BF, non corrigé : $C(p) = 1 \Rightarrow v_r(k) = \epsilon(k)$

Etude théorique :

a) $H(p) = \frac{K}{1 + \tau p} \Rightarrow H_B(z) = (1 - z^{-1}) \cdot \mathcal{Z} \left[\frac{H(p)}{p} \right] = \frac{(1 - \alpha)z^{-1}}{1 - \alpha z^{-1}}$

$\Rightarrow T(z) = C(z) \cdot H_B(z) = H_B(z) = \frac{(1 - \alpha)z^{-1}}{1 - \alpha z^{-1}}$

avec $\alpha = e^{-\frac{T_e}{\tau}}$:

Te/tau	0,1	0,125	0,25	0,5	0,7	1	2
Te (μs)	2200	2750	5500	11000	15400	22000	44000
N = ⌊Te	0898	0ABE	157C	2AF8	3C28	55F0	ABE0
α	0,90	0,88	0,78	0,61	0,50	0,37	0,14

b) $F(z) = \frac{T(z)}{1 + T(z)} = \frac{(1 - \alpha)z^{-1}}{1 - (\alpha - (1 - \alpha))z^{-1}} = \frac{(1 - \alpha)z^{-1}}{1 - \lambda z^{-1}}$ avec $\lambda = 2\alpha - 1$

c) **⚠** Remarque : il est possible de simuler les résultats expérimentaux (qui confirment ce calcul) en exécutant l'algorithme traduisant cette dernière relation :

$F(z) = \frac{V_s}{V_e} = \frac{(1 - \alpha)z^{-1}}{1 - \lambda z^{-1}} \Rightarrow V_s(1 - \lambda z^{-1}) = V_e(1 - \alpha)z^{-1}$

$\Rightarrow s_k = (1 - \alpha)e_{k-1} + \lambda s_{k-1}$ où : $e_k = v_e(k) \equiv 1$ (échelon unité) et $s_k = v_s(k)$

On obtient les réponses indicielles suivantes, pour différentes valeurs de T_e .

⚠ En abscisse, l'échelle adoptée, identique dans tout le TP, est la suivante :

$0 \leq t = kT_e \leq 10\tau = 220\text{ms}$

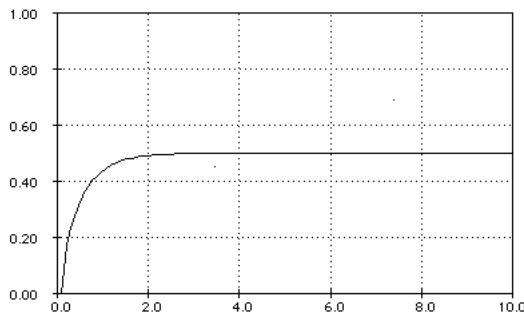
L'unité de l'axe des temps est la constante de temps τ .

Le nombre de périodes d'échantillonnages est, pour $T_e = a \cdot \tau$ ($a < 1$) :

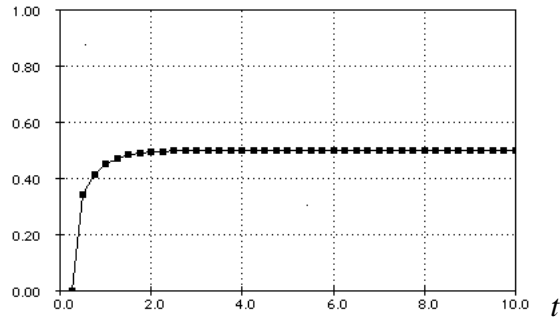
$0 \leq k \leq \frac{10}{a}$

Te/tau	0,1	0,125	0,25	0,5	0,7	1	2
k max	100	80	40	20	14	10	5

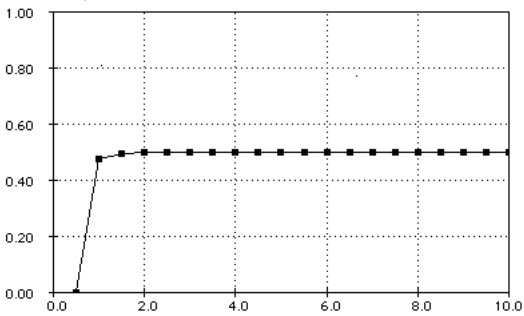
Te = 0,125τ



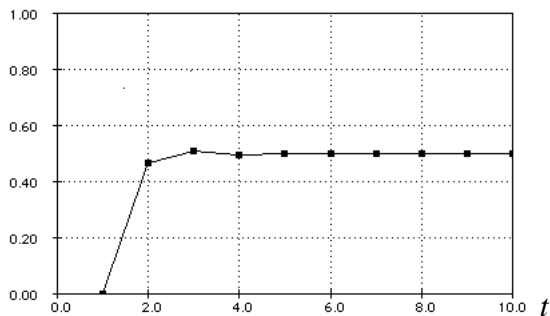
Te = 0,25τ



Te = 0,5τ



Te = τ



Calcul de l'écart statique : en statique, $\omega = 0$ par définition, donc : $z = e^{j\omega T_e} \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} 1$

$$F(z) = \frac{V_s}{V_e} = \frac{(1-\alpha)z^{-1}}{1-\lambda z^{-1}} \rightarrow F(1) = \frac{1-\alpha}{1-\lambda} = \frac{1}{2} \Rightarrow \varepsilon_{01} = \frac{\varepsilon}{v_e} = \frac{v_e - v_s}{v_e} = 1 - F(1) = \frac{1}{2} = 50\%$$

II- Correction proportionnelle P : $C(p) = K \Rightarrow v_r(k) = K.\varepsilon(k)$

Etude théorique :

a) $T(z) = C(z).H_B(z) = K.H_B(z) = \frac{K(1-\alpha)z^{-1}}{1-\alpha z^{-1}}$ avec $\alpha = e^{-\frac{T_e}{\tau}}$

b) $F(z) = \frac{T(z)}{1+T(z)} = \frac{K(1-\alpha)z^{-1}}{1-(\alpha - K(1-\alpha))z^{-1}} = \frac{K(1-\alpha)z^{-1}}{1-\lambda z^{-1}}$ avec $\lambda = \alpha - K(1-\alpha)$

c) Condition de stabilité :

$$|\lambda| < 1 \Rightarrow -1 < K < \frac{1+\alpha}{1-\alpha}$$

Te/tau	0,1	0,125	0,25	0,5	0,7	1	2
α	0,90	0,88	0,78	0,61	0,50	0,37	0,14
Kmax	20,0	16,0	8,0	4,1	3,0	2,2	1,3

Comme précédemment, il est possible de simuler les résultats expérimentaux (qui confirment ce calcul) en exécutant l'algorithme traduisant cette dernière relation :

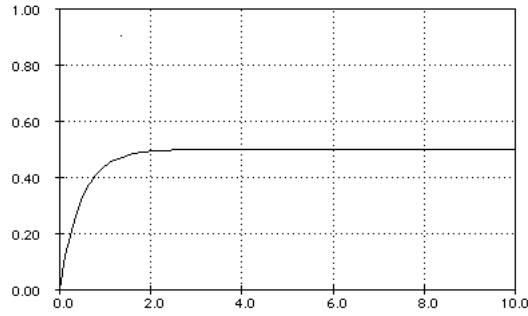
$$F(z) = \frac{V_s}{V_e} = \frac{K(1-\alpha)z^{-1}}{1-\lambda z^{-1}} \Rightarrow V_s(1-\lambda z^{-1}) = V_e K(1-\alpha)z^{-1}$$

$$s_k = K(1-\alpha)e_{k-1} + \lambda s_{k-1} \quad \text{où : } e_k = v_e(k) \equiv 1 \text{ (échelon unité) et } s_k = v_s(k)$$

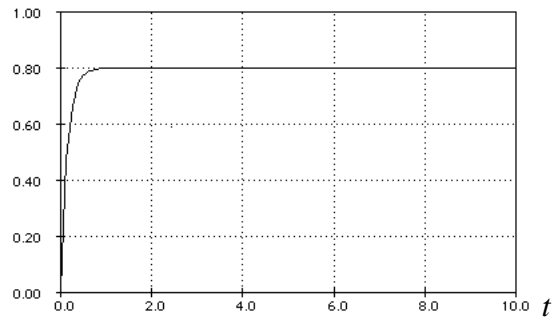
On obtient les réponses indicielles suivantes, pour différentes valeurs de T_e :

Influence de K : $T_e = 0,125\tau \Rightarrow K_{max} = 16$

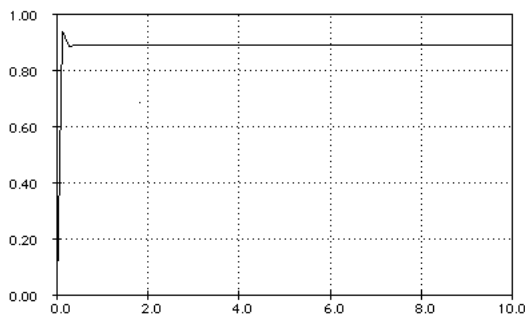
$K = 1 \Rightarrow \epsilon = 50\%$



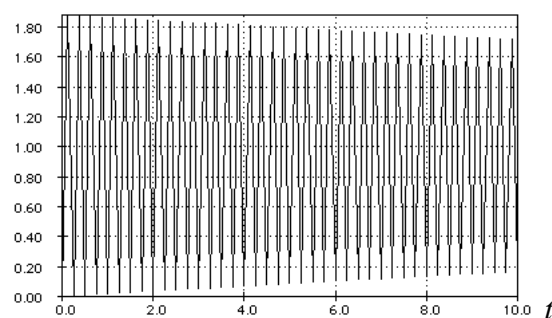
$K = 4 \Rightarrow \epsilon = 20\%$



$K = 8 \Rightarrow \epsilon = 11\%$



$K = 16 \Rightarrow \epsilon = 6\%$, instable



Calcul de l'écart statique :

$$F(z) = \frac{V_s}{V_e} = \frac{K(1-\alpha)z^{-1}}{1-\lambda z^{-1}} \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} F(1) = K \frac{1-\alpha}{1-\lambda}$$

$\epsilon_{01} = 1 - F(1) :$

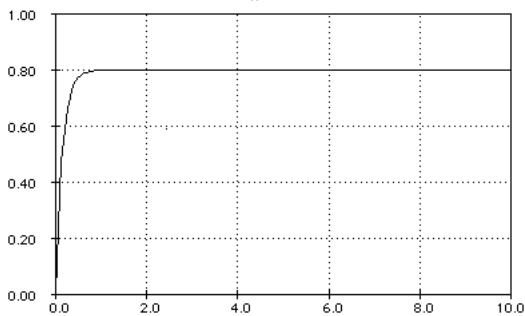
Te/tau	0,125	K	1	4	8	16
α	0,88	λ	0,76	0,41	-0,06	-1,00
		ϵ	50%	20%	11%	6%

Les valeurs théoriques de ϵ_{01} sont conformes aux résultats de la simulation.

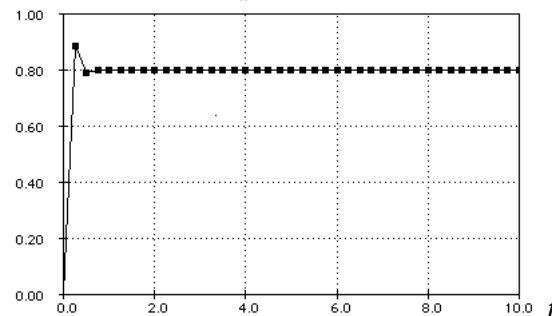
On constate d'autre part que, conformément aux prédictions théoriques, le système devient instable à partir de $K = 16$.

Influence de T_e : $K = 4 \Rightarrow \epsilon_{01} = 20\%$

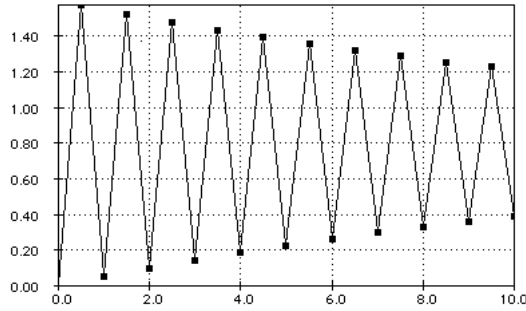
$T_e = 0,125\tau \Leftrightarrow K_{max} = 16$



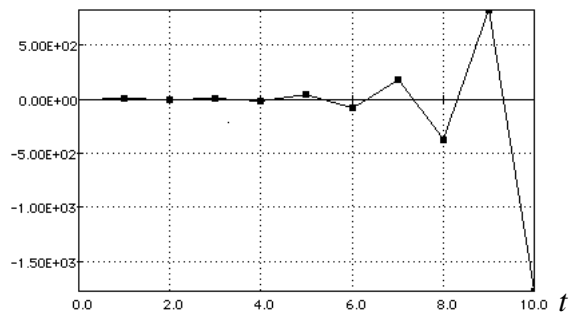
$T_e = 0,25\tau \Leftrightarrow K_{max} = 8$



$T_e = 0,5\tau \Leftrightarrow K_{\max} = 4,1$; instable



$T_e = \tau \Leftrightarrow K_{\max} = 2,2$; instable



III- Correction intégrale pure I : $C(p) = \frac{K}{T_i p}$

Etude théorique, méthode approchée :

a) On sait que, de manière approchée, le facteur $1/p$ qui correspond à une intégrale devient :

$$\frac{1}{p} \rightarrow \frac{T_e}{1-z^{-1}} \Rightarrow C(z) = K \frac{T_e}{T_i} \frac{1}{1-z^{-1}} = K' \frac{1}{1-z^{-1}} \quad \text{en posant : } K' = K \cdot \frac{T_e}{T_i}$$

b) Algorithme du correcteur :

$$C(z) = \frac{V_i}{\varepsilon} = K' \frac{1}{1-z^{-1}} \Rightarrow (1-z^{-1})V_i = K'\varepsilon \Rightarrow v_i(k) = K'\varepsilon(k) + v_i(k-1)$$

(ligne AF50 du programme, puis sauvegarde du résultat pour la prochaine période d'échantillonnage ligne AF53)

$$c) T(z) = C(z) \cdot H_B(z) = \frac{K'(1-\alpha)z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-\alpha z^{-1})} = \frac{K'(1-\alpha)z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-\alpha z^{-1})}$$

$$d) F(z) = \frac{K'(1-\alpha)z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-\alpha z^{-1}) + K'(1-\alpha)z^{-1}} = \frac{K'(1-\alpha)z^{-1}}{1-\lambda z^{-1} + \alpha z^{-2}} \quad \text{avec } \lambda = 1 + \alpha - K'(1-\alpha)$$

On simule ci-dessous les résultats expérimentaux en exécutant l'algorithme qui traduit l'expression de $F(z)$:

$$F(z) = \frac{V_s}{V_e} = \frac{K'(1-\alpha)z^{-1}}{1-\lambda z^{-1} + \alpha z^{-2}} \Rightarrow s_k = K'(1-\alpha)e_{k-1} + \lambda s_{k-1} - \alpha s_{k-2}$$

où : $e_k = v_e(k) \equiv 1$ (échelon unité) et $s_k = v_s(k)$

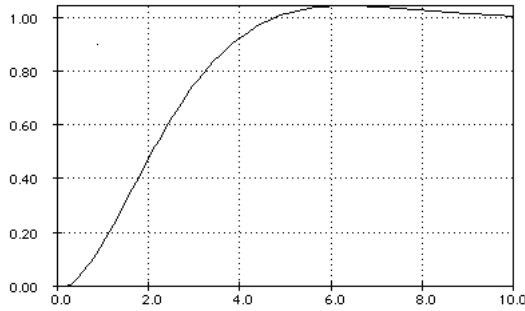
e) On choisit $T_e = 0,125\tau$ et $T_i = 10\tau$:

$$\left. \begin{array}{l} T_e = 0,125\tau \\ T_i = 10\tau \\ K' = K \cdot \frac{T_e}{T_i} \end{array} \right\} \Rightarrow K' = 0,0125K$$

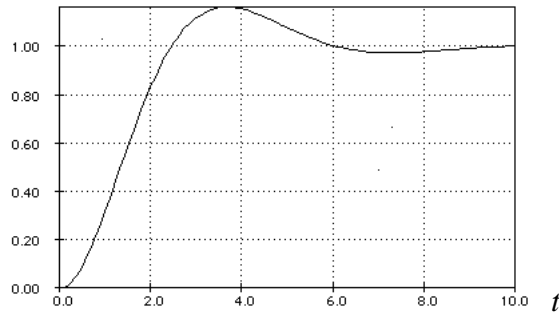
Te/tau	0,125	K	5	10	80	160	320	2560
Ti/tau	10	K'	0,0625	0,125	1	2	4	32
α	0,88	λ	1,88	1,87	1,76	1,65	1,41	-1,88

f) On constate que l'erreur statique est bien nulle mais que, comme en analogique, la réponse du système muni de son correcteur intégral est beaucoup plus lente, quand il n'y a pas de dépassement, qu'avec un simple correcteur P.

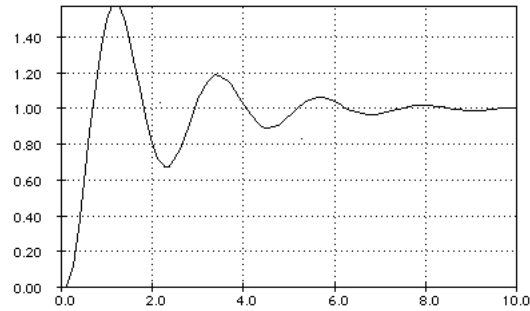
$K' = 0,0625$



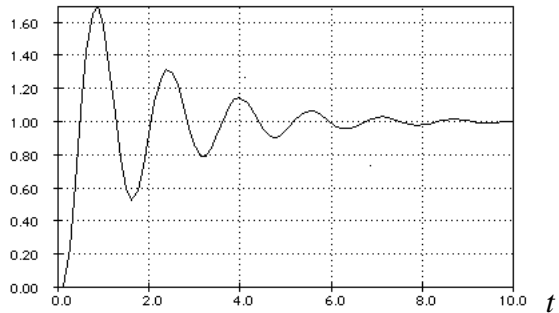
$K' = 0,125 \Rightarrow$ dépassement $\approx 20\%$



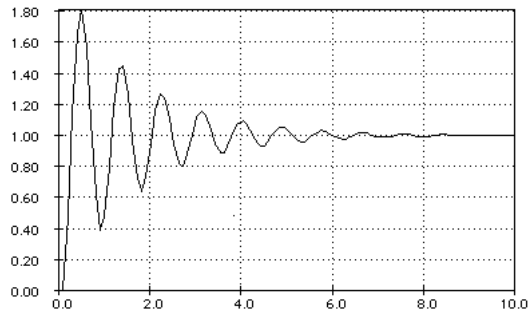
$K' = 1$



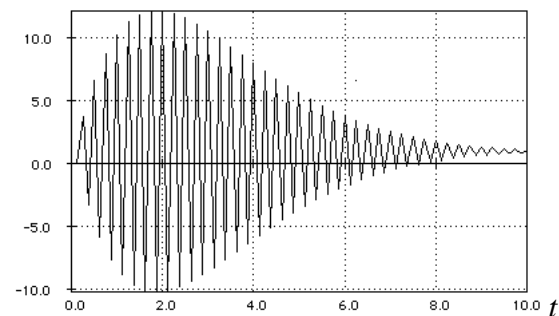
$K' = 2$



$K' = 4$



$K' = 32$



g) Le système en BF est stable si le polynôme $P(z) = z^2 - \lambda z + \alpha$ satisfait aux deux conditions suivantes (voir cour, chap B23 page 11) :

Polynôme $P(z) = Az^2 + Bz + C$, avec $A > 0$

1) $|C| < A$ ou $C - A < 0$

2) $P(1) > 0$ et $P(-1) > 0$, soit : $A + B + C > 0$ et $A - B + C > 0$

Ici $A = 1$; $B = -\lambda$; $C = \alpha$. La condition 1 est satisfaite ; la condition 2 conduit à :

$$1 - 1 - \alpha + K'(1 - \alpha) + \alpha > 0 \Rightarrow K' > 0$$

$$1 + 1 + \alpha - K'(1 - \alpha) + \alpha > 0 \Rightarrow K' < 2 \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} \text{ soit } K' < 32. \text{ Ce que la simulation ci-dessus confirme.}$$

Etude théorique par la méthode exacte :

Si on compte du fait que l'intégrateur pur en $1/p$ est réalisé au moyen d'un système échantillonné et bloqué, il faut calculer $C_B(z)$ par la méthode habituelle :

a) $C_B(z) = \frac{V_i}{\varepsilon} = (1 - z^{-1}) \mathbf{Z} \left(\frac{K}{T_i p^2} \right) = K \frac{T_e}{T_i} \frac{z^{-1}}{1 - z^{-1}} = K' \frac{z^{-1}}{1 - z^{-1}}$ en posant : $K' = K \cdot \frac{T_e}{T_i}$

b) Algorithme du correcteur :

$$C_B(z) = \frac{V_i}{\varepsilon} = K' \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}} \Rightarrow v_i(k) = K'\varepsilon(k-1) + v_i(k-1)$$

c) $T(z) = C_B(z) \cdot H_B(z) = \frac{K'(1-\alpha)z^{-2}}{(1-z^{-1})(1-\alpha z^{-1})} = \frac{K'(1-\alpha)z^{-2}}{(1-z^{-1})(1-\alpha z^{-1})}$

d) $F(z) = \frac{K'(1-\alpha)z^{-2}}{(1-z^{-1})(1-\alpha z^{-1}) + K'(1-\alpha)z^{-2}} = \frac{K'(1-\alpha)z^{-2}}{1 - (1+\alpha)z^{-1} + \lambda z^{-2}}$ avec $\lambda = \alpha + K'(1-\alpha)$
 $\Rightarrow s_k = K'(1-\alpha)e_{k-2} + (1+\alpha)s_{k-1} - \lambda s_{k-2}$

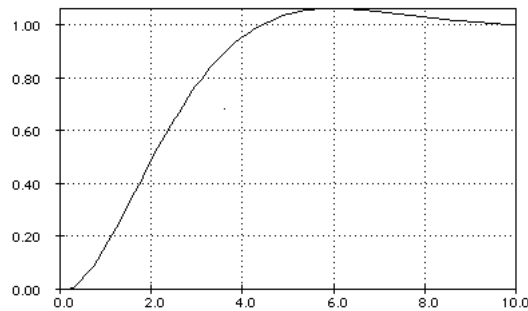
e) On choisit $T_e = 0,125\tau$ et $T_i = 10\tau$:

$$\left. \begin{array}{l} T_e = 0,125\tau \\ T_i = 10\tau \\ K' = K \cdot \frac{T_e}{T_i} \end{array} \right\} \Rightarrow K' = 0,0125K$$

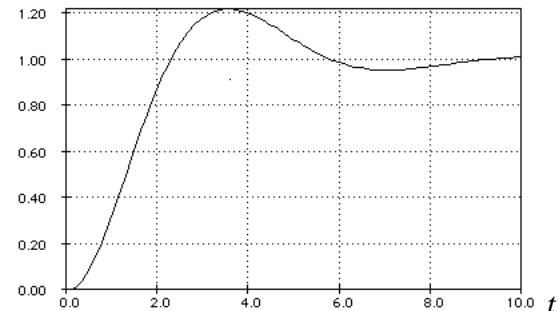
Te/tau	0,125	K	5	10	80	160
Ti/tau	10	K'	0,0625	0,125	1	2
α	0,88	λ	0,89	0,90	1,00	1,12

f) On observe un résultat très proche du résultat obtenu par le calcul approché. Toutefois, l'instabilité est atteinte dès $K' = 1$

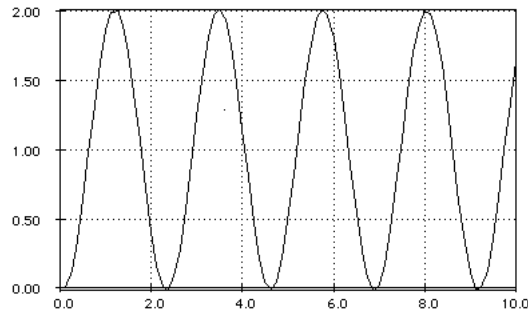
$K' = 0,0625$



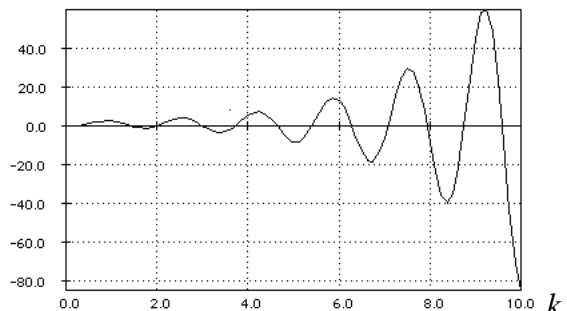
$K' = 0,125$



$K' = 1$



$K' = 2$



g) Le système en BF est stable si le polynôme $P(z) = z^2 - (1+\alpha)z + \lambda$ satisfait aux deux conditions suivantes, avec $A = 1$; $B = -(1+\alpha)$; $C = \lambda$.

La condition 1 conduit à :

$$\alpha + K'(1-\alpha) < 1 \Rightarrow K' < 1. \text{ Ce que la simulation ci-dessus confirme.}$$

La condition 2 conduit à :

$$1 - 1 - \alpha + \alpha + K'(1-\alpha) > 0 \Rightarrow K' > 0$$

$$1 + 1 + \alpha + \alpha + K'(1-\alpha) > 0 \Rightarrow K' > -2 \frac{1+\alpha}{1-\alpha} \text{ (condition toujours satisfaite).}$$

IV- Systeme corrigé PI en BF (calcul exact)

a) $C_B(z) = (1 - z^{-1})Z \left[\frac{K}{p} \left(1 + \frac{1}{T_i p} \right) \right] = K \left(1 + \frac{T_e}{T_i} \frac{z^{-1}}{1 - z^{-1}} \right) = K \frac{1 - \left(1 - \frac{T_e}{T_i} \right) z^{-1}}{1 - z^{-1}}$

b) $v_i(k) = K\varepsilon(k) - K \left(1 - \frac{T_e}{T_i} \right) \varepsilon(k-1) + v_i(k-1)$

c) $\alpha = 7/8 \Rightarrow T_e = -\ln \alpha = 0,1335\tau = 2937 \mu s \ (\Leftrightarrow N = \$0B78)$

Remarque : les graphes ci-dessous s'étendent comme précédemment sur 10 constantes de temps (10τ), donc sur un nombre de périodes d'échantillonnages égal à 10/T_e = 75 périodes.

d) $T(z) = C_B(z) \cdot H_B(z) = K \frac{1 - \left(1 - \frac{T_e}{T_i} \right) z^{-1}}{1 - z^{-1}} \frac{(1 - \alpha) z^{-1}}{1 - \alpha z^{-1}}$

e) On choisit un réglage simple : $\alpha = 1 - \frac{T_e}{T_i} \Rightarrow T_i = T_e \frac{1}{1 - \alpha} = 8T_e = 1,068\tau$

$T_B(z) = K \frac{(1 - \alpha) z^{-1}}{1 - z^{-1}}$

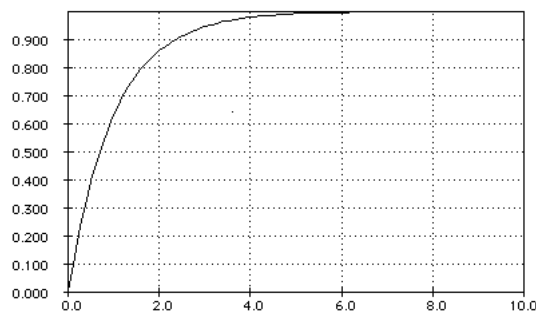
f) $F(z) = \frac{K(1 - \alpha) z^{-1}}{1 - [1 - K(1 - \alpha)] z^{-1}} = \frac{(1 - \lambda) z^{-1}}{1 - \lambda z^{-1}}$ avec $\lambda = 1 - K(1 - \alpha)$

$\Rightarrow s_k = (1 - \lambda)e_{k-1} + \lambda s_{k-1}$

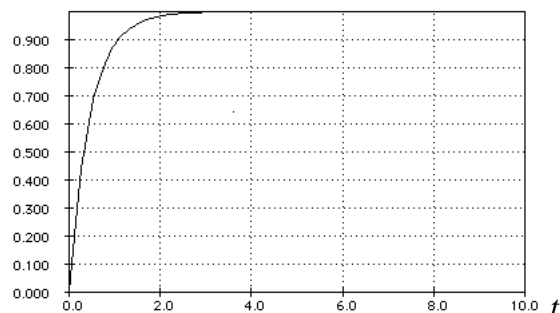
Te/tau	0,1335	K	1	2	4	8	16	32
Ti/tau	1,068	λ	0,88	0,75	0,50	0,00	-1,00	-3,00
α	0,875							

La simulation permet de vérifier l'action du correcteur : temps de réponse identique au temps obtenu avec un correcteur P, mais sans erreur statique (ni dépassement).

K = 1

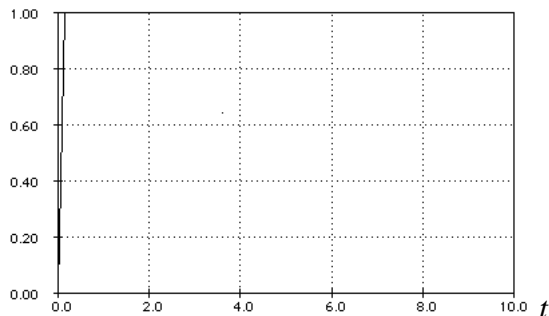
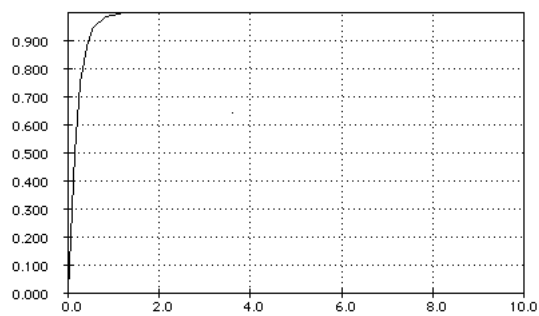


K = 2

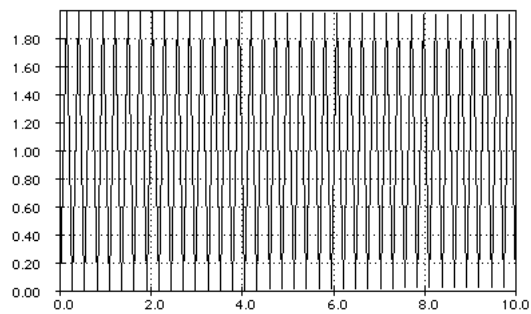


K = 4

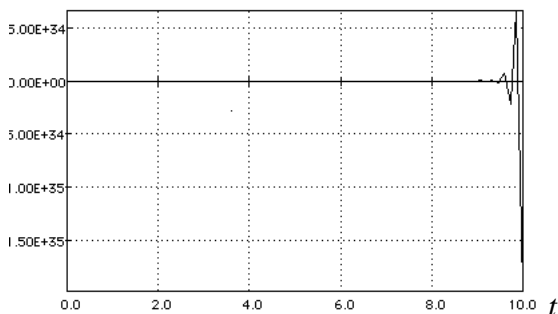
K = 8



K = 16



K = 32



g) Condition de stabilité :

$$K < \frac{2}{1-\alpha} = 16$$