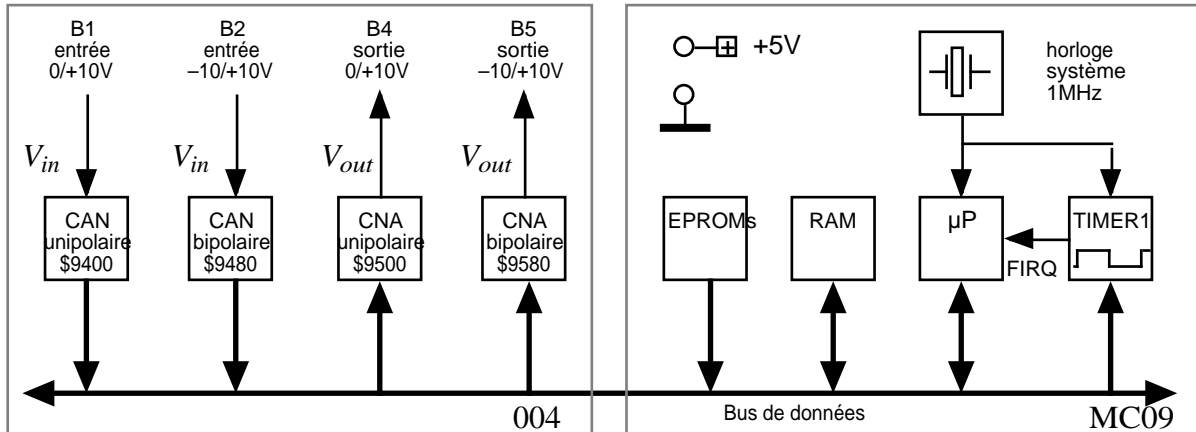


## B23 - Filtrage Numérique

*But : réaliser par voie numérique la fonction filtrage analogique étudiée précédemment (voir partie A du programme, TP A14). Matériel : identique au TP B15.*



### I- Filtres non récurrents (filtres à Réponse Impulsionnelle Finie - RIF)

On désire étudier expérimentalement les filtres suivants (voir cours, §B23), avec  $T_e = 100\mu s$  :

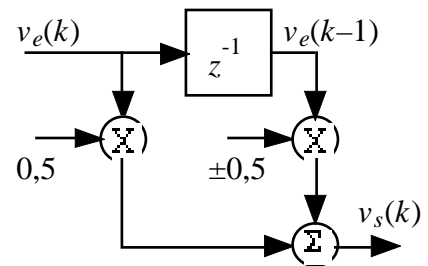
- dérivateur : 
$$v_s(k) = \frac{v_e(k) - v_e(k-1)}{2}$$

- interpolateur : 
$$v_s(k) = \frac{v_e(k) + v_e(k-1)}{2}$$

Algorithme (du sous-programme d'interruption) :

```

Préchargement timer
Acquisition de ve(k) sur le CAN
Mémoriser ve(k)
vs(k) = [ve(k) ± ve(k-1)]/2
Remplacer, en mémoire, ve(k-1) par ve(k)
Sortie de vs(k) vers le CNA
retour
  
```



Comme précédemment (TP B21 - Discrétisation), et si ce n'est déjà fait, précharger la période d'échantillonnage ( $100\mu s$ ) aux adresses  $\$0F00:0F01$ . Exécuter le programme  $\$AC91$  (soustraction) puis le programme  $\$ACBF$  (addition).

#### 1) Réponses en fréquence

a) *Tableaux de mesures* : régler le GBF de façon à fournir une tension  $v_e(t)$  sinusoïdale pure d'amplitude 2 volts.

Pour diverses valeurs de  $f$  convenablement choisies comprises entre  $F_e/200$  et  $F_e/2$  (fréquence de Shannon), mesurer pour chaque filtre :  $V_{e\text{eff}}$ ,  $V_{s\text{eff}}$ . Calculer  $|T| = \frac{V_{s\text{eff}}}{V_{e\text{eff}}}$  puis  $G_{\text{dB}} = 20 \log |T|$ .

Remplir deux tableaux de mesures :  $f$ ,  $\omega$ ,  $V_e$ ,  $V_s$ ,  $|T|$ ,  $G$ .

Faire de même en mesurant le déphasage  $\phi$  de  $v_s$  par rapport à  $v_e$ , pour l'interpolateur uniquement : tableau  $\phi$  ( $^\circ$ ),  $\phi$  (rad),  $\Delta t$

$$\text{Rappel : } v(t) = A \sin(\omega t + \phi) = A \sin\left[\omega\left(t + \frac{\phi}{\omega}\right)\right] = A \sin[\omega(t + \Delta t)] \Rightarrow \Delta t = \frac{\phi}{\omega}$$

b) *Courbes de gain* : tracer sur un même graphe semi-logarithmique les courbes de gain  $G(f)$ . Relever graphiquement les fréquences de coupure ( $F_c$ ) à  $-3$  dB.

c) *Asymptotes* : tracer les asymptotes des courbes relevées. Quelles sont leurs pentes ?

d) *Calcul théorique de la fonction de transfert du filtre dérivateur* :

Sachant que, en régime harmonique :  $v_s(k) = \frac{v_e(k) - v_e(k-1)}{2} \Rightarrow \underline{V}_s(k) = \frac{V_e(k) - V_e(k-1)}{2}$  avec

$\underline{V}_e(k-1) = \underline{V}_e(k) e^{-j\omega T_e}$ , établir l'expression de la fonction de transfert  $\underline{H}(j\omega) = \frac{V_s(k)}{V_e(k)}$ .

Montrer que le gain de ce filtre est :  $G = 20 \log \left| \sin \pi \frac{f}{F_e} \right|$  (rappel :  $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$ ).

e) *Calcul théorique de l'asymptote oblique du filtre dérivateur* :

Sachant que  $\sin x \approx x$  lorsque  $x \rightarrow 0$ , en déduire l'équation  $G(f)$  de cette asymptote.

A quelle fréquence  $F_0$  coupe-t-elle l'axe des abscisses ?

f) *Fréquence de coupure* : en agissant sur la valeur de préchargement du timer, faire varier pour l'un des filtres la période d'échantillonnage (par ex. :  $200 \mu\text{s}$ ). Vérifier que la fréquence de coupure du filtre reste proportionnelle à  $F_e$ . Sachant que  $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , en déduire la relation qui lie  $F_c$  à  $F_e$ .



La valeur de  $T_e$  ne peut être inférieure au temps d'exécution du sous-programme d'interruption. En tout état de cause, garder  $T_e \geq 80 \mu\text{s}$ .

g) *Courbes de phase* : à partir du tableau de mesure (question a), tracer en échelle linéaire la courbe de phase  $\varphi(f)$  de l'un des deux filtres. Conclusion : de quelle forme est la relation  $\varphi(f)$  ?

h) *Décalage horaire* : que peut-on dire du retard pur  $\Delta t$  introduit par le système numérique entre la tension d'entrée et la tension de sortie ?

Conclusion : si  $\Delta t$  est grand (supposition : le  $\mu\text{P}$  est trop lent et le système numérique "rame" !), que devient  $\varphi$  ?

i) *Dynamique d'entrée* : sur le filtre interpolateur, en basse fréquence, augmenter l'amplitude du signal d'entrée pour observer le phénomène de saturation numérique.

En déduire la dynamique d'entrée du filtre.

## 2) Réponses indicielles

a) Relever, pour chaque filtre, sa réponse indicielle à partir d'un signal logique (GBF sortie TTL).

b) Pour chaque filtre, remplir le tableau :

$k$	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$V_e$								
$V_s$								

Vérifier que la réponse du filtre est de durée finie : combien faut-il de périodes d'échantillonnage pour répondre à l'impulsion d'entrée ?

c) Observer pour diverses formes de signaux l'action du filtre dérivateur.

**II- Filtre récursif (filtre à Réponse Impulsionnelle Infinie - RII)**

On désire étudier expérimentalement l'équivalent numérique d'un filtre du premier ordre. L'algorithme du filtre est obtenu par simulation approchée par dérivée arriérée (voir cours, §B23) :

$$\tau \frac{dv_s(t)}{dt} + v_s(t) = v_e(t) \Rightarrow \tau \frac{v_s(k) - v_s(k-1)}{T_e} + v_s(k) = v_e(k) \Rightarrow v_s(k) = \frac{v_e(k) + \frac{\tau}{T_e} v_s(k-1)}{1 + \frac{\tau}{T_e}}$$

Cet algorithme est récursif, puisque la sortie à l'instant  $k$  dépend de sa valeur à l'instant  $k-1$ .

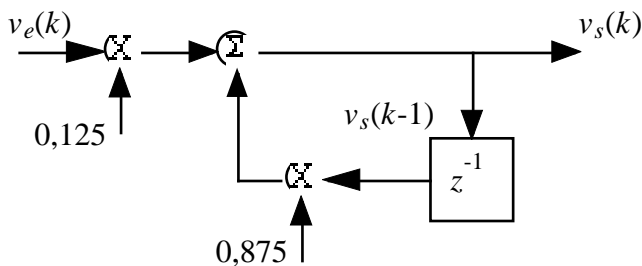
Soit  $T_e = 100\mu s$  et  $\tau = 700\mu s$  (ces valeurs sont choisies pour se limiter à un algorithme de calcul facile à programmer en langage machine).

Donc :  $\frac{\tau}{T_e} = 7 \Rightarrow v_s(k) = 0,125.v_e(k) + 0,875.v_s(k-1)$

Algorithme (du sous-programme d'interruption) :

```

Préchargement timer
Acquisition de u(k) sur le CAN
vs(k) = [ve(k) + 7* vs(k-1)]/8
remplacer, en mémoire, vs(k-1) par vs(k)
Sortie de vs(k) vers le CNA
retour
    
```



NB : en binaire, une division par 8 est obtenue facilement par trois décalages à droite successifs (soit trois divisions par 2). Par exemple :

$$12/2 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline & 1 & 1 & 0 \\ \hline \end{array} = 6$$

La multiplication par 7 est exécutée par l'instruction MUL.

- a) Exécuter le programme \$ACED. Relever la courbe de gain.
- b) Mesurer la fréquence de coupure. Sachant que  $\tau = 700\mu s$ , quelle serait le fréquence de coupure du filtre analogique correspondant ?
- c) Relever la réponse indicielle à partir d'un signal logique. Celle-ci est-elle réellement "infinie" ? Estimer le nombre de périodes d'échantillonnage nécessaires pour atteindre 100% de la réponse.
- d) Calculer les 5 premières valeurs de la réponse à un échelon unité ( $v_e = 1$  pour  $t > 0$ ) :

$k$	-1	0	1	2	3	4	5
$v_e$							
$v_s$							

e) Calcul théorique de la courbe de gain (méthode approchée)

Sachant que, en régime harmonique :

$$v_s(k) = 0,125v_e(k) + 0,875v_s(k-1) \Rightarrow \underline{V}_s(k) = 0,125\underline{V}_e(k) + 0,875\underline{V}_s(k-1)$$

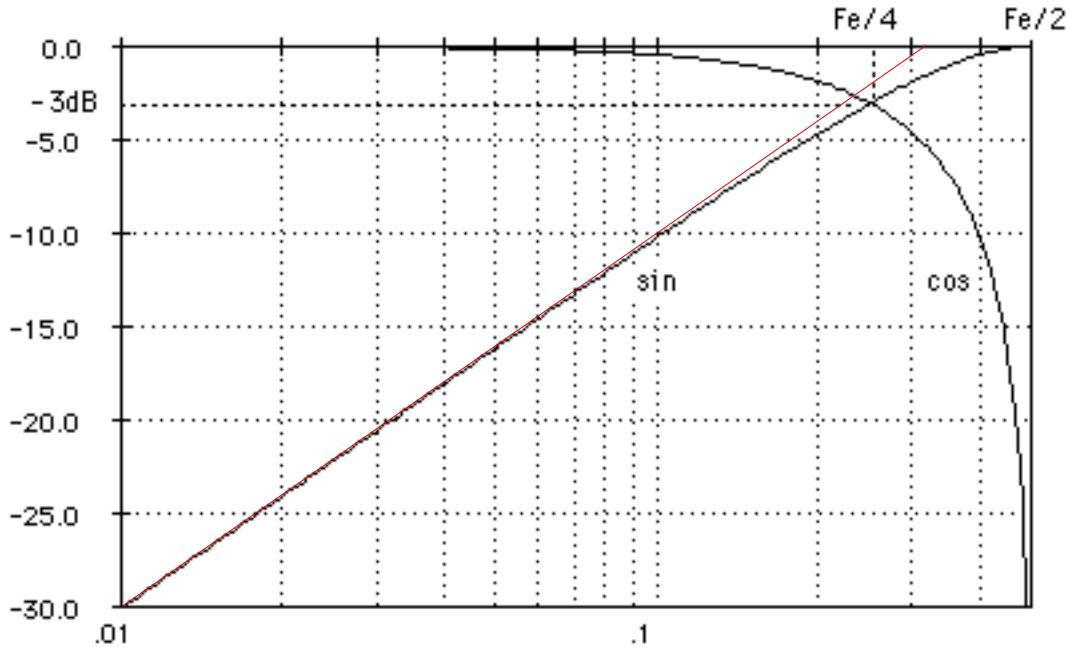
avec  $\underline{V}_s(k-1) = \underline{V}_s(k).e^{-j\omega T_e}$ , établir l'expression de la fonction de transfert  $\underline{H}(j\omega)$  de ce filtre puis de son gain en dB. En déduire sa fréquence de coupure à  $-3dB$ .

Commentaires

I- Filtres non récursifs (filtres à Réponse Impulsionnelle Finie - RIF)

Rappel : Fréquence maxi du signal :  $T_e = 100\mu s \Rightarrow f_{max} = \frac{F_e}{2} = 5kHz$

b)



Filtre dérivateur :

\* - filtre non récursif, soustraction  
 \* - Te, entrée/sortie, adr mémoire : idem \$AC73 (TP B21)  
 \* (variable interne : \$0F02 : table des u(k))  
 \*

AC91 30 8D 00 10	prog6	LEAX	spg6,PCR	adr s-p d'interruption
AC95 BF 0F 66		STX	vfirq	vecteur d'interruption
AC98 86 F2		LDA	#\$F2	initialisation TIMER 1
AC9A BE 0F 00		LDX	\$0F00	
AC9D BD A8 80		JSR	itimer	
ACA0 3C BF	loop6	CWAI	##10111111	autorisation et attente
ACA2 20 FC		BRA	loop6	d'interruption
ACA4 3F		SWI		
ACA5 BF 88 02	spg6	STX	drtim1	6 µs démarrage décompteur
ACA8 CE 0F 02		LDU	#\$0F02	6 adr table des u(k)
ACAB B6 94 80		LDA	can_bi	5 acquisition u(k)
ACAE 88 80		EORA	##10000000	2 bin décalé -> comp 2
ACB0 A7 41		STA	1,U	5 sauve u(k) à adr U+1
ACB2 A0 C4		SUBA	,U	4 u(k) - u(k-1)
ACB4 47		ASRA		2 div par 2, avec signe
ACB5 E6 41		LDB	1,U	5 copie u(k) à adr U
ACB7 E7 C4		STB	,U	4
ACB9 88 80		EORA	##10000000	2 comp 2 -> bin décalé
ACBB B7 95 80		STA	cna_bi	5
ACBE 3B		RTI		



Il est important que le sous-programme d'acquisition et de calcul s'exécute en un temps

inférieur ou égale à la période d'échantillonnage (100  $\mu$ s), qui est par construction la période des interruptions. Ici on calcule :  $\Delta t = 6+6+5+2+5+4+2+5+4+2+5 = 46 \mu$ s auquel il faut ajouter le temps d'exécution de l'appel du sous-programme d'interruption par l'instruction CWAI (une vingtaine de  $\mu$ s) et de son retour par RTI (6  $\mu$ s).

⚠ Le code signé employé par le microprocesseur pour effectuer des calculs arithmétiques est le code complément à 2. Or les CAN et CNA bipolaires travaillent en code binaire décalé : il faut donc passer d'un code à l'autre. Cela s'effectue par les instructions EOR qui change l'état du bit de signe (bit de poids fort) : cf cours chap B11

⚠ En binaire, une division par 2 s'effectue par un simple décalage à droite (instruction ASR)

⚠ Le rôle de cette division par 2 est de conserver une pleine échelle constante entre l'entrée et la sortie du filtre, la somme algébrique de deux tensions comprises entre -10 et +10V pouvant conduire à un résultat compris (au plus) entre -20 et +20V.

### 1) Réponses en fréquence

d) Algorithme :

$$v_s(k) = \frac{v_e(k) - v_e(k-1)}{2}$$

Fonction de transfert :

$$\left. \begin{array}{l} \underline{V}_s(k) = \frac{\underline{V}_e(k) - \underline{V}_e(k-1)}{2} \\ \underline{V}_e(k-1) = \underline{V}_e(k) \cdot e^{-j\omega T_e} \end{array} \right\} \Rightarrow H(j\omega) = \frac{\underline{V}_s(k)}{\underline{V}_e(k)} = \frac{1 - e^{-j\omega T_e}}{2}$$

Gain :

$$\left. \begin{array}{l} G = 20 \log |H(j\omega)| \\ e^{-j\omega T_e} = \cos \omega T_e - j \sin \omega T_e \\ 1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow G = 20 \log \left| \sin \frac{\omega T_e}{2} \right|$$

f) Fréquence de coupure :

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\omega T_e}{2} = \pi \frac{f}{F_e} \\ G = -3 \text{dB} \Leftrightarrow \left| \sin \frac{\omega T_e}{2} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} \end{array} \right\} \Rightarrow F_c = \frac{F_e}{4} = 2,5 \text{ kHz}$$

c) Asymptote :

$$\left. \begin{array}{l} \text{pour } f \ll F_e : \frac{f}{F_e} \rightarrow 0 \\ \sin x \xrightarrow{x \rightarrow 0} x \end{array} \right\} \Rightarrow G \approx 20 \log \pi \frac{f}{F_e}$$

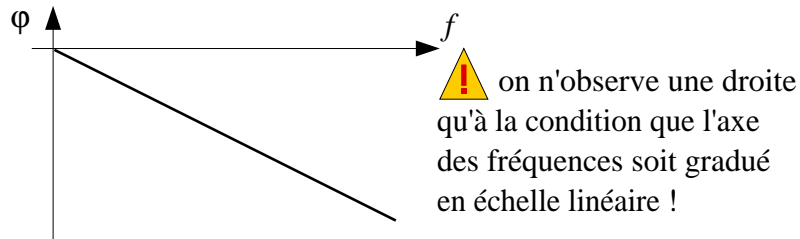
L'asymptote a une pente égale à +6dB/octave : ce filtre est un filtre passe-haut. Elle coupe l'axe des fréquences en :

$$\left. \begin{array}{l} G \approx 20 \log \pi \frac{f}{F_e} \\ G = 0 \Leftrightarrow \pi \frac{f}{F_e} = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow F_0 = \frac{F_e}{\pi} \approx 3,2 \text{ kHz}$$

g) et h) Déphasage : comme pour le programme AC73 (cf TP B21), la lecture du CAN prend en compte le résultat de la conversion précédente, faite pendant l'avant-dernière période d'échantillonnage. Entre l'acquisition de la tension d'entrée  $v_e$  et la restitution du calcul en  $v_s$ , il s'écoule donc un retard (constant) de l'ordre de  $T_r \approx T_e + \Delta t \approx 150 \mu s$ .

Ce retard étant fixe, il en résulte un déphasage arrière proportionnel à la fréquence (c'est pourquoi ces filtres sont encore appelés "filtres à phase linéaire") :

$$\sin(\omega t + \varphi) = \sin\left[\omega\left(t + \frac{\varphi}{\omega}\right)\right] = \sin[\omega(t - T_r)] \Rightarrow \varphi = -2\pi T_r \cdot f$$

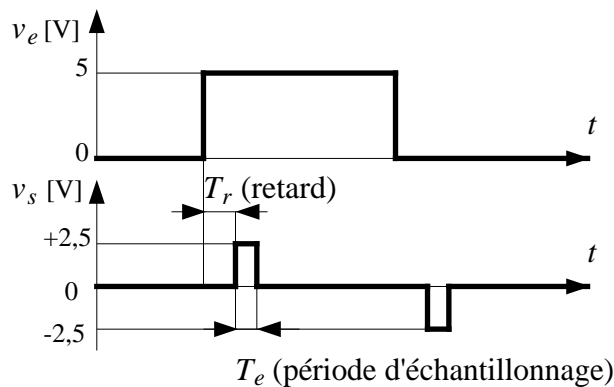


Exemple : à la fréquence de coupure le déphasage vaut :  $\varphi = -360.150.10^{-6}.2500 = -135^\circ$

i) Dynamique d'entrée : observation identique au TP B15, §2-2. On trouve ici une dynamique de l'ordre de 20V, la division par 2 permettant de conserver cette valeur de pleine échelle avant saturation numérique.

**2) Réponse indicielle**

$k$	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$v_e$ [V]	0	0	0	5	5	5	0	0
$v_s$ [V]	0	0	0	2,5	0	0	-2,5	0



Quand le signal d'entrée  $v_e$  est constant, la dérivée est nulle et  $v_s = 0$ . En revanche, sur un front montant de  $v_e$ , la dérivée est positive et très grande, correspondant si le front est parfaitement vertical à une impulsion "de Dirac" de hauteur infinie et de durée nulle. Mais le calcul numérique se contente de produire une impulsion de hauteur 2,5V et de durée  $T_e$ . Il en est de même pour un front descendant.

**Filtre interpolateur :**

			* - filtre non récursif, addition
			* - $T_e$ , entrée/sortie, adr mémoire : idem \$AC73 (TP B21)
			*
ACBF 30 8D 00 10	prog7	LEAX spg7,PCR	adr s-p d'interruption
ACC3 BF 0F 66		STX vfirq	vecteur d'interruption
ACC6 86 F2		LDA #\$F2	initialisation TIMER 1
ACC8 BE 0F 00		LDX \$0F00	
ACCB BD A8 80		JSR itimer	
ACCE 3C BF	loop7	CWAI #%10111111	autorisation et attente
ACD0 20 FC		BRA loop7	d'interruption
ACD2 3F		SWI	
ACD3 BF 88 02	spg7	STX drtim1	démarrage décompteur
ACD6 CE 0F 02		LDU #\$0F02	adr table des u(k)
ACD9 B6 94 80		LDA can_bi	acquisition u(k)
ACDC 88 80		EORA #%10000000	bin décalé -> comp 2
ACDE A7 41		STA 1,U	sauve u(k) à adr U+1
ACE0 AB C4		ADDA ,U	u(k) - u(k-1)
ACE2 47		ASRA	div par 2, avec signe
ACE3 E6 41		LDB 1,U	copie u(k) à adr U
ACE5 E7 C4		STB ,U	
ACE7 88 80		EORA #%10000000	comp 2 -> bin décalé
ACE9 B7 95 80		STA cna_bi	
ACEC 3B		RTI	

**1) Réponses en fréquence**

d) Algorithme :

$$v_s(k) = \frac{v_e(k) + v_e(k-1)}{2}$$

Fonction de transfert :

$$\left. \begin{array}{l} \underline{V}_s(k) = \frac{\underline{V}_e(k) + \underline{V}_e(k-1)}{2} \\ \underline{V}_e(k-1) = \underline{V}_e(k) \cdot e^{-j\omega T_e} \end{array} \right\} \Rightarrow H(j\omega) = \frac{\underline{V}_s(k)}{\underline{V}_e(k)} = \frac{1 + e^{-j\omega T_e}}{2}$$

Gain :

$$\left. \begin{array}{l} G = 20 \log |H(j\omega)| \\ e^{-j\omega T_e} = \cos \omega T_e - j \sin \omega T_e \\ 1 + \cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow G = 20 \log \left| \cos \frac{\omega T_e}{2} \right|$$

f) Fréquence de coupure :

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\omega T_e}{2} = \pi \frac{f}{F_e} \\ G = -3 \text{dB} \Leftrightarrow \left| \cos \frac{\omega T_e}{2} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} \end{array} \right\} \Rightarrow F_c = \frac{F_e}{4} = 2,5 \text{kHz}$$

c) Asymptote :

$$f = \frac{F_e}{2} = f_{\max} \Rightarrow |H| = 0 \Rightarrow G \rightarrow -\infty$$

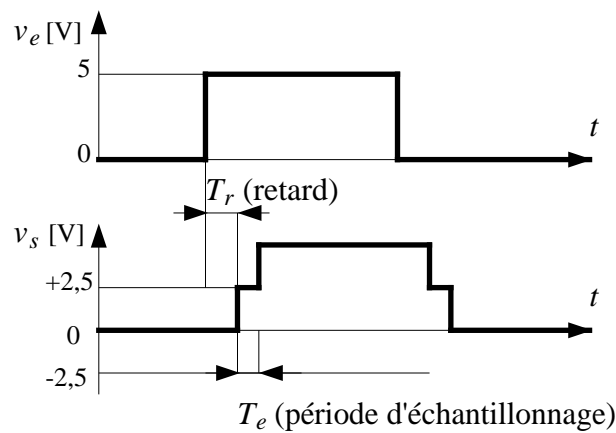
Ce filtre est un filtre passe-bas. L'asymptote est une droite verticale. Elle coupe l'axe des fréquences en  $F_0 = 5$  kHz.

g) et h) Déphasage : idem filtre dérivateur. Il s'agit toujours d'un déphasage arrière puisque l'exécution du programme entraîne un retard.

i) Dynamique d'entrée : idem filtre dérivateur.

## 2) Réponse indicielle

$k$	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$V_e$ [V]	0	0	0	5	5	5	0	0
$V_s$ [V]	0	0	0	2,5	5	5	2,5	0



## II- Filtre récursif (filtre à Réponse Impulsionnelle Infinie - RII)

\* - filtre récursif

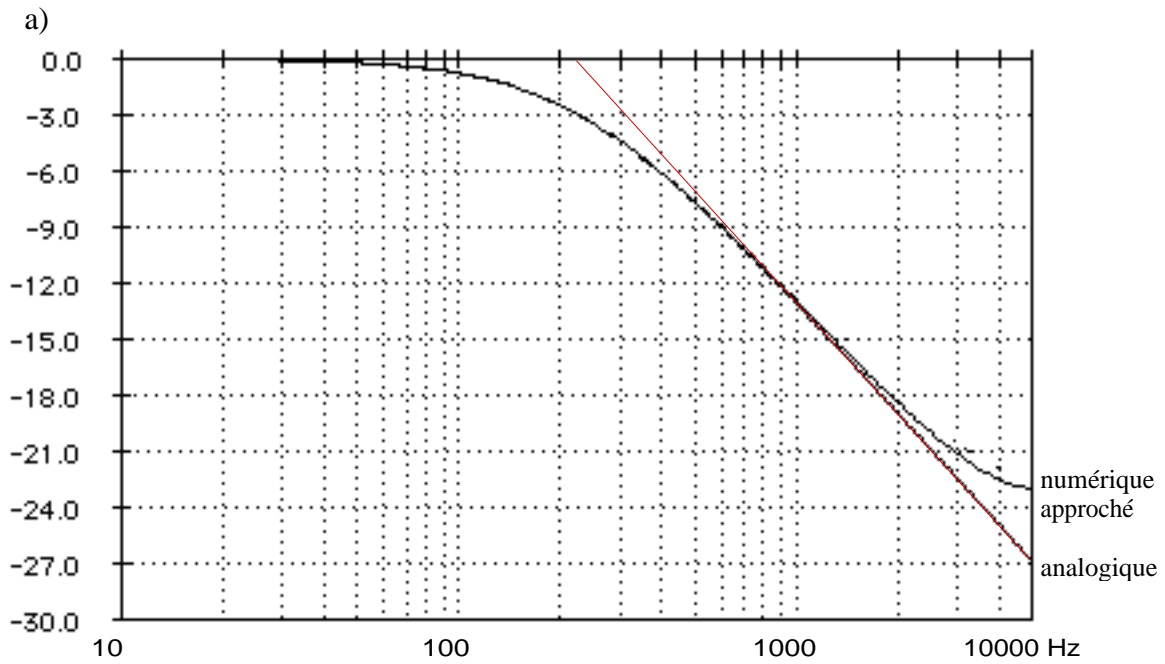
\* -  $T_e$ , entrée/sortie, adr mémoire : idem \$AC73 (TP B21)

\*

ACED 30 8D 00 10	prog8	LEAX	spg8,PCR	adr s-p d'interruption
ACF1 BF 0F 66		STX	vfirq	vecteur d'interruption
ACF4 86 F2		LDA	#\$F2	initialisation TIMER 1
ACF6 BE 0F 00		LDX	\$0F00	
ACF9 BD A8 80		JSR	itimer	
ACFC 3C BF	loop8	CWAI	##10111111	autorisation et attente
ACFE 20 FC		BRA	loop8	d'interruption
AD00 3F		SWI		
AD01 BF 88 02	spg8	STX	drtim1	démarrage décompteur
AD04 CE 0F 02		LDU	#\$0F02	adr table des u(k)
AD07 6F 41		CLR	1,U	u(0) = 0
AD09 B6 94 80		LDA	can_bi	acquisition u(k)
AD0C A7 42		STA	2,U	sauve u(k) à adr U+1
AD0E A6 C4		LDA	,U	7 x v(k-1) + u(k)
AD10 C6 07		LDB	#\$07	
AD12 3D		MUL		opérations sur 16 bits
AD13 E3 41		ADDD	1,U	
AD15 44		LSRA		division par 8 (/2/2/2)
AD16 56		RORB		
AD17 44		LSRA		
AD18 56		RORB		
AD19 44		LSRA		

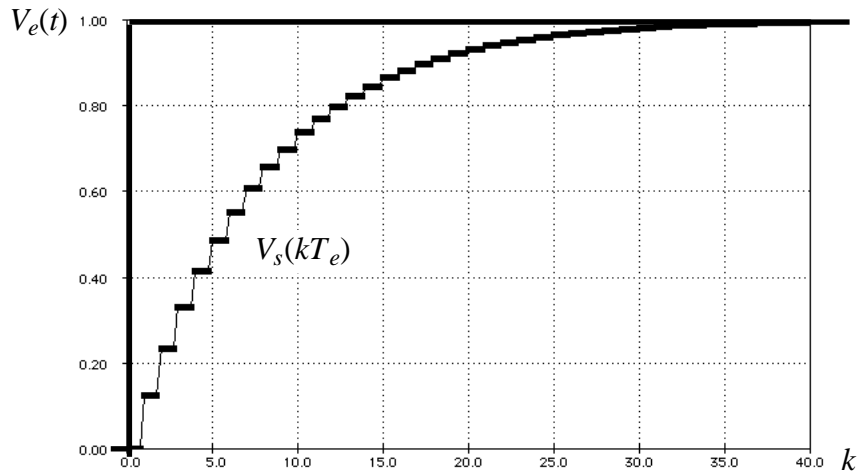


AD1A 56	RORB		
AD1B E7 C4	STB	,U	copie de v(k)
AD1D F7 95 80	STB	cna_bi	seul le poids faible est recopié ds le CNA
AD20 3B	RTI		



b)  $T_e = 100 \mu s$  ;  $\tau = 7T_e = 700 \mu s \Rightarrow F_{c(analogique)} = 1/2\pi\tau = 227,4 \text{ Hz}$ .

c) Réponse à un échelon : en pratique, la réponse n'est pas infinie : on constate ici qu'au-delà de la 35ème période d'échantillonnage, le signal de sortie est quasi identique au signal d'entrée :



d)

$k$	-1	0	1	2	3	4	5
$V_e$	0	0	1	1	1	1	1
$V_s$		0	0,125	0,234	0,330	0,414	0,487

e) Calcul théorique de la courbe de gain (méthode approchée) :

Algorithme :

$$v_s(k) = \frac{v_e(k) + \frac{\tau}{T_e} v_s(k-1)}{1 + \frac{\tau}{T_e}} = \frac{v_e(k) + 7v_s(k-1)}{8}$$

Fonction de transfert :

$$\left. \begin{aligned} \underline{V}_s(k) &= \frac{v_e(k) + 7v_s(k-1)}{8} \\ \underline{V}_s(k-1) &= \underline{V}_s(k) \cdot e^{-j\omega T_e} \end{aligned} \right\} \Rightarrow H(j\omega) = \frac{\underline{V}_s(k)}{\underline{V}_e(k)} = \frac{1}{8 - 7e^{-j\omega T_e}}$$

Gain :

$$\left. \begin{aligned} G &= 20 \log |H(j\omega)| \\ e^{-j\omega T_e} &= \cos \omega T_e - j \sin \omega T_e \end{aligned} \right\} \Rightarrow G = 20 \log \frac{1}{\sqrt{113 - 112 \cos \omega T_e}}$$

Fréquence de coupure :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\omega T_e}{2} &= \pi \frac{f}{F_e} \\ G = -3\text{dB} &\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{113 - 112 \cos \omega T_e}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow F_c = \frac{F_e}{2\pi} \arccos \frac{111}{112} = 213 \text{ Hz}$$

On constate que la fréquence de coupure obtenue diffère légèrement de son équivalent analogique.

*Courbe de gain obtenue par la méthode exacte (voir cours B23) :*

Fonction de transfert (en  $j\omega$  ou en  $p$ ) du système analogique :

$$H(p) = \frac{1}{1 + \tau p}$$

Fonction de transfert en  $z$  du système échantillonné :

$$H_B(z) = \frac{V_s}{V_e} = (1 - z^{-1}) \cdot \mathbf{Z} \left[ \frac{H(p)}{p} \right] = \frac{(1 - \alpha) \cdot z^{-1}}{1 - \alpha \cdot z^{-1}} \quad \text{avec } \alpha = e^{-\frac{T_e}{\tau}} = 0,867.$$

Algorithme :

$$V_s - \alpha z^{-1} V_s = (1 - \alpha) z^{-1} V_e \Rightarrow v_s(k) = (1 - \alpha) \cdot v_e(k-1) + \alpha \cdot v_s(k-1)$$



Cet algorithme est plus difficile à implémenter que l'algorithme approché car il faut utiliser des coefficients réels égaux à  $\alpha = 0,867$  et  $1 - \alpha = 0,133$ , ce qui nécessite au minimum un calcul en virgule fixe (code binaire fractionnaire). Un processeur DSP serait plus adapté dans ce cas.

Fonction de transfert en  $j\omega$  du système échantillonné :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1 - \alpha}{e^{j\omega T_e} - \alpha} = \frac{1 - \alpha}{\cos \omega T_e - \alpha + j \sin \omega T_e}$$

Gain :

$$G = 20 \log |\underline{H}(j\omega)| = 20 \log \frac{1 - \alpha}{\sqrt{(\cos \omega T_e - \alpha)^2 + (\sin \omega T_e)^2}} = 20 \log \frac{1 - \alpha}{\sqrt{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos \omega T_e}}$$

Fréquence de coupure à - 3dB : pour  $|\underline{H}(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$  le calcul aboutit à :

$$F_{c(\text{numérique})} = \frac{F_e}{2\pi} \arccos \frac{-\alpha^2 + 4\alpha - 1}{2\alpha} = 227,5 \text{ Hz} = F_{c(\text{analogique})}$$