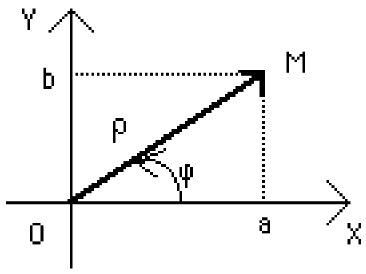
A11. Représentation des tensions et des courants sinusoïdaux

Vecteurs et nombres complexes



$\overrightarrow{OM} = [\rho\ ;\ \varphi]$

$$\underline{z} = \begin{cases} [\rho\ ;\varphi] & \text{coordonnées polaires} \\ a + \mathrm{j}b & \text{coordonnées rectangulaires} \end{cases}$$

	Vecteurs	*Nombres complexes*	
longueur	$\left\Vert\overrightarrow{OM}\right\Vert = \rho$	$\vert\underline{z}\vert = \rho$	module
angle	$\left(\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OM}\right) = \varphi$	$\mathrm{Arg}(\underline{z}) = \varphi$	argument
abscisse de M	$\mathrm{Proj}\left(\overrightarrow{OM}\right)_{/OX} = a$	$\mathcal{Re}(\underline{z}) = a$	partie réelle
ordonnée de M	$\mathrm{Proj}\left(\overrightarrow{OM}\right)_{/OY} = b$	$\mathcal{Im}(\underline{z}) = b$	partie imaginaire

$\underline{z} = \rho(\cos\varphi + \mathrm{j}\sin\varphi) = \rho\, e^{\mathrm{j}\,\varphi}$ *formule d'Euler*

Transformations de coordonnées

Polaires → Rectangulaires :

$$\begin{cases} a = \rho\cos\varphi \\ b = \rho\sin\varphi \end{cases}$$

Rectangulaires → Polaires :

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \varphi = \arctan\dfrac{b}{a} \quad \text{si} \quad a > 0 \\ \quad = \arctan\dfrac{b}{a} + \pi \quad \text{si} \quad a < 0 \end{cases}$$

NB1 : nombres complexes remarquables :

$e^{\mathrm{j}\pi} = -1$ car : $\cos\pi + \mathrm{j}\ \sin\pi = -1$

$e^{\mathrm{j}\frac{\pi}{2}} = \mathrm{j}$ car : $\cos\dfrac{\pi}{2} + \mathrm{j}\ \sin\dfrac{\pi}{2} = \mathrm{j}$ ou : $e^{\mathrm{j}\frac{\pi}{2}} = \left(e^{\mathrm{j}\pi}\right)^{1/2} = \sqrt{e^{\mathrm{j}\pi}} = \sqrt{-1} = \mathrm{j}$

$e^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{2}} = -\mathrm{j}$ car : $\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) + \mathrm{j}\ \sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = -\mathrm{j}$ ou : $e^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{2}} = \dfrac{1}{e^{\mathrm{j}\frac{\pi}{2}}} = \dfrac{1}{\mathrm{j}} = -\mathrm{j}$

NB2 : produit de nombres complexes

$$\underline{V} = \underline{T}.\underline{U} \Leftrightarrow \begin{cases} \left|\underline{V}\right| = \left|\underline{T}\right|\left|\underline{U}\right| \text{ ou, plus simplement : } V = T.U \\ \mathrm{Arg}(\underline{V}) = \mathrm{Arg}(\underline{T}) + \mathrm{Arg}(\underline{U}) \text{ ou : } \varphi_V = \varphi_T + \varphi_U \end{cases}$$

ISBN 2-9520781-0-6

Tensions et courants sinusoïdaux ("régime harmonique")

• ***Représentation analytique :*** $u(t) = U \sin(\omega t + \varphi) = U \sin[\omega(t + \Delta t)]$:

U : amplitude (V)

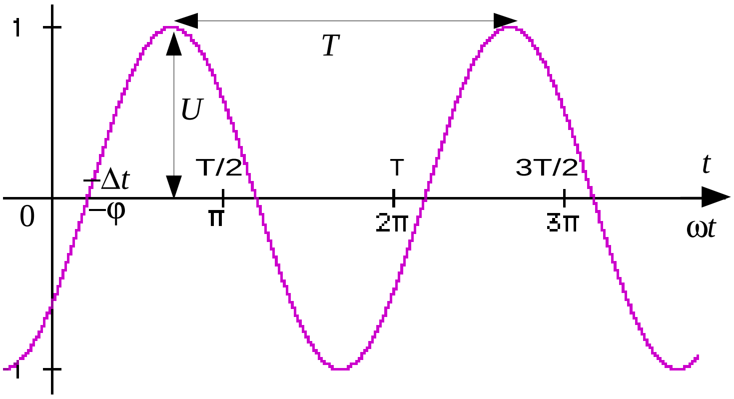
T : période (s)

f : fréquence (Hz)

$\omega = 2\pi f = \dfrac{2\pi}{T}$: pulsation (rad/s)

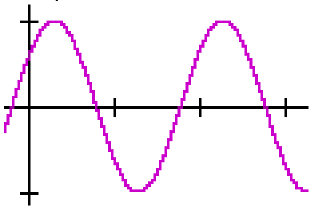
φ : phase (° ou rad)

$\Delta t = \dfrac{\varphi}{\omega}$: décalage horaire (s)



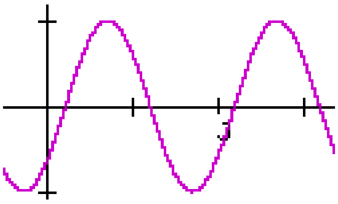
NB :

$\varphi > 0$: AVANCE



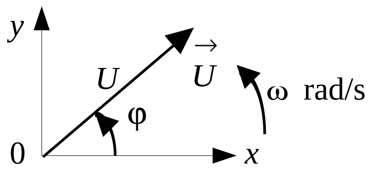
$u = U \sin(\omega t + \pi/3)$

$\varphi < 0$: RETARD



$u = U \sin(\omega t - \pi/3)$

• ***Représentation de Fresnel :***



• ***Représentation complexe :***

$$\underline{u}(t) = U\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\varphi)} = \underline{U}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$$

avec $\underline{U} = U\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} = [U\,;\varphi]$: *amplitude complexe*

(quantité indépendante du temps)

•  ***Remarques à propos des représentations de Fresnel et complexe :***

1°) La représentation complexe est plus puissante que la représentation vectorielle, puisqu'elle permet de représenter la grandeur sinusoïdale $u(t)$ à tout instant, et non seulement à l'instant origine. La partie indépendante du temps, ou *amplitude complexe,* correspond au vecteur de Fresnel $\vec{U}$, qui est dessiné à l'instant $t = 0$.

⇒ la représentation de Fresnel est une photo, la représentation complexe une vidéo !

2°) Par rapport à la représentation analytique, vecteurs et nombres complexes présentent une ambiguité, puisqu'ils peuvent représenter aussi bien la fonction :

$U \sin(\omega t+\varphi) = \mathrm{Proj}\left(\vec{U}\right)_{/OY} = \mathcal{Im}(\underline{u})$ *représentation européenne*

ISBN 2-9520781-0-6

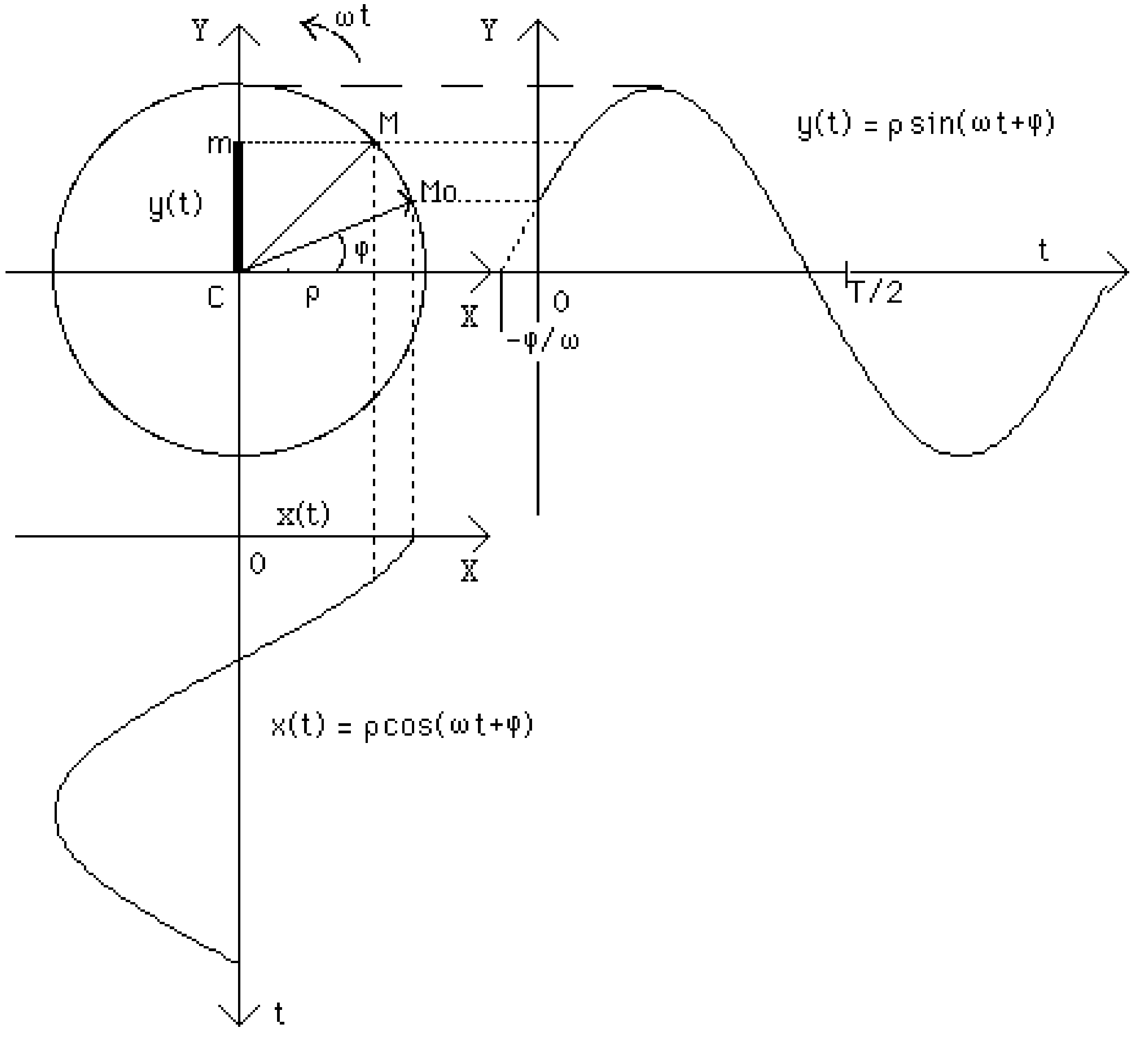
que la fonction :

$U\cos(\omega t+\varphi) = \text{Proj}\,(\vec{U})_{/OX} = \mathcal{R}e(\underline{u})$ *représentation américaine* (utilisée aux USA)

Il convient donc de choisir l'une de ces représentations :

DANS TOUTE LA SUITE, NOUS UTILISERONS LES FONCTIONS EN SINUS

Un fonction en cosinus, par exemple $U\cos(\omega t+\varphi)$, s'écrira donc : $U\sin(\omega t+\varphi+\pi/2)$.

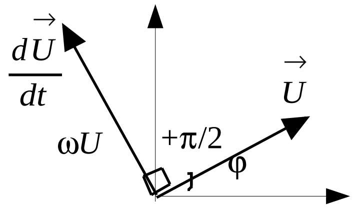


ISBN 2-9520781-0-6

• *Dérivée* $\Leftrightarrow$ *avance de phase de* $\pi/2$:

R. Analytique : $u(t) = U\sin(\omega t + \varphi) \quad \Rightarrow \quad \dfrac{du}{dt} = \omega U\cos(\omega t + \varphi) = \omega U\sin\left(\omega t + \varphi + \dfrac{\pi}{2}\right)$

R. Fresnel :

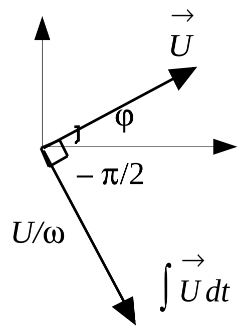


R. Complexe : $\underline{u}(t) = \underline{U}\,e^{j\omega t} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{d\,\underline{u}}{dt} = j\omega\underline{U}e^{j\omega t} = j\omega\underline{u}$ avec $j\omega\underline{u} = \omega U e^{j\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)}$

• *Intégrale* $\Leftrightarrow$ *retard de phase de* $\pi/2$:

R. Analytique : $u(t) = U\sin(\omega t + \varphi) \quad \Rightarrow \quad \int u\,dt = -\dfrac{U}{\omega}\cos(\omega t + \varphi) = \dfrac{U}{\omega}\sin\left(\omega t + \varphi - \dfrac{\pi}{2}\right)$

R. Fresnel :



R. Complexe : $\underline{u}(t) = \underline{U}\,e^{j\omega t} \quad \Rightarrow \quad \int \underline{u}\,dt = \dfrac{1}{j\omega}\underline{U}e^{j\omega t} = \dfrac{\underline{u}}{j\omega}$ avec $\dfrac{\underline{u}}{j\omega} = \dfrac{U}{\omega}e^{j\left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right)}$

! Notation de Laplace

• *En régime transitoire* (cf § A14) ***:***

$$pu \leftrightarrow \frac{du}{dt}$$

$$\frac{u}{p} \leftrightarrow \int u.dt$$

• *En régime harmonique :* $p = j\omega$

ISBN 2-9520781-0-6