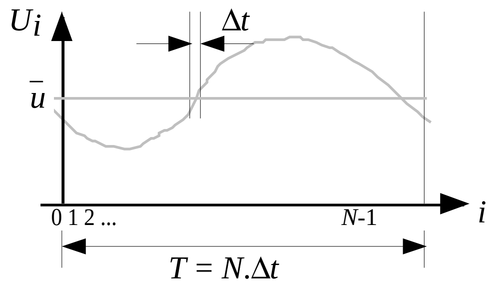
A13. Propriétés des signaux périodiques

Valeur moyenne et valeur efficace des signaux périodiques :

Échantillonnés



• *Moyenne arithmétique*

$$\overline{u} = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} U_i$$

or $T = N.\Delta t \;\Rightarrow\; \overline{u} = \frac{1}{T}\sum_{i=0}^{N-1} U_i.\Delta t \quad \xrightarrow[\Delta t \to dt]{}$

NB : on note encore :

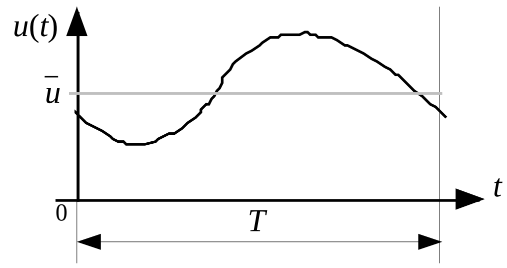
$$\overline{u} = \langle u \rangle$$

• *Variable centrée*

$$u_i = U_i - \overline{u}$$

NB : $\overline{u_i} = \frac{1}{N}\sum U_i - \overline{u} \equiv 0 \;\Rightarrow\; \overline{u_{AC}} \equiv 0$

Analogiques



• *Valeur moyenne (ou composante continue)*

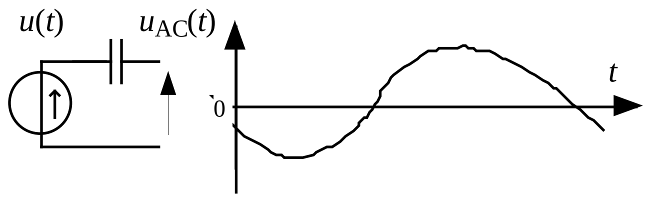
$$\overline{u} = U_{DC} = \frac{1}{T}\int_0^T u(t).dt$$

NB : technique de calcul pour une grandeur sinusoïdale, avec $x = \omega t$:

$$U_{DC} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x).dx$$

• *Composante alternative*

$$u_{AC}(t) = u(t) - U_{DC}$$



Par définition, une grandeur alternative est une grandeur de valeur moyenne nulle.

• *Moyenne quadratique (= moyenne des carrés)*

$$\overline{u^2} = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} U_i^2 \quad \xrightarrow[\Delta t \to dt]{}$$

• *Carré de la valeur efficace vraie*

$$U_{eff}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)\, dt$$

NB : on note encore : $U_{eff} = U_{RMS}$, où RMS signifie *Root Mean Square* (racine de la moyenne des carrés)

$$U_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)\, dt}$$

La puissance moyenne est proportionnelle au carré de la valeur efficace vraie : $P = k.U_{eff}^2$

ISBN 2-9520781-0-6

• *Ecart-type*

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} u_i^2} \quad \xrightarrow[\Delta t \to dt]{}$$

• *Valeur efficace de la composante alternative*

$$U_{AC} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u_{AC}^2(t)\, dt}$$

NB : en régime sinusoïdal pur :

$$U_{AC} = U_{eff} = \frac{U}{\sqrt{2}}$$

• *Calcul de la valeur efficace vraie*

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum\left(U_i - \bar{u}\right)^2$$
$$= \frac{1}{N}\sum\left(U_i^2 - 2\bar{u}.U_i + \bar{u}^2\right)$$
$$= \frac{1}{N}\sum U_i^2 - \bar{u}^2$$
$$= \overline{u^2} - \bar{u}^2$$

$$\xrightarrow[\Delta t \to dt]{} \quad U_{AC}^2 = U_{eff}^2 - U_{DC}^2 \Rightarrow U_{eff} = \sqrt{U_{DC}^2 + U_{AC}^2}$$

NB : on note encore : $U_{eff} = U_{AC+DC}$

Spectre des signaux périodiques

• *Spectre*

$$u(t) = U_{DC} + \sum_{n=1}^{\infty} U_n \sin\left(n\omega_1 t + \varphi_n\right)$$

ω_1 : pulsation du fondamental (rang 1)

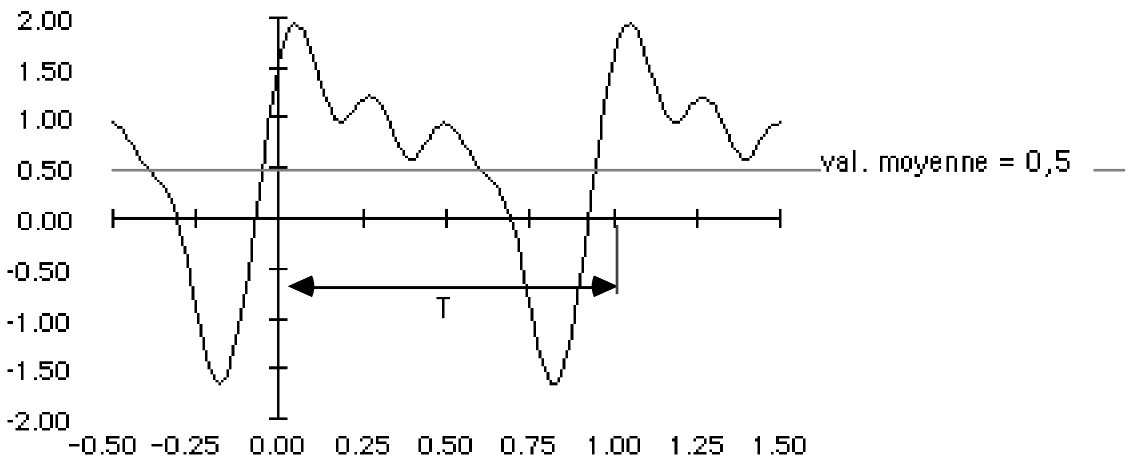
$\omega_n = n\omega_1$: pulsation de l'harmonique de rang n

$U(n)$: spectre d'amplitude

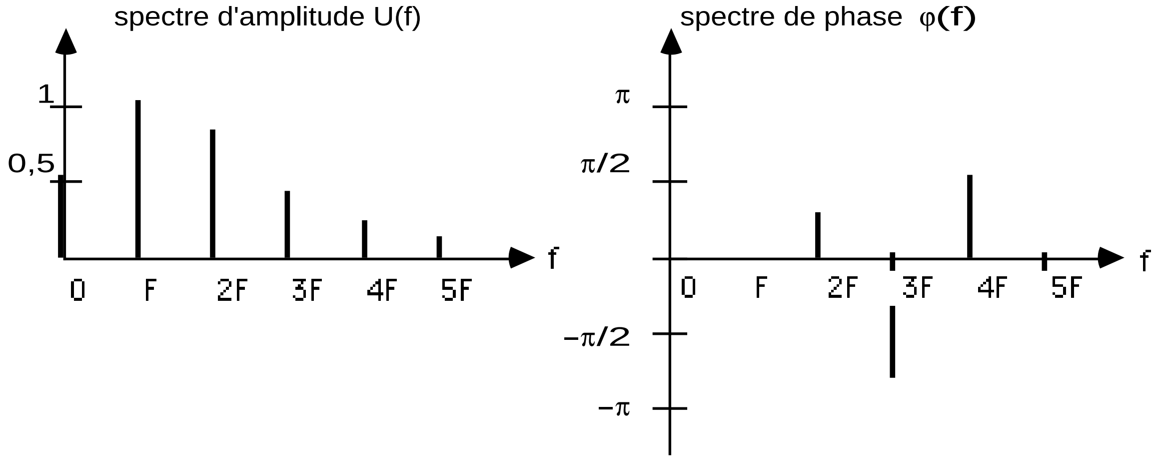
$\varphi(n)$: spectre de phase

Exemple :

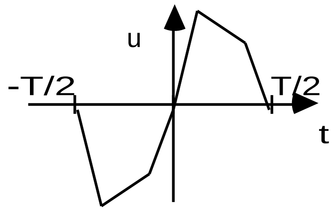
$u(t)$ = 0,5 + sin(ωt) + 0,8.sin($2\omega t+\pi/4$) + 0,4.sin($3\omega t-3\pi/2$) + 0,2.sin($4\omega t+\pi/2$) + 0,1.sin($5\omega t-\pi/3$)



ISBN 2-9520781-0-6



⚠ Les signaux à symétrie demi-onde (signaux les plus courants en électricité) n'ont pas d’harmoniques de rang pair ⇒ on note : $n = 2k+1$ pour signifier que n est nécessairement impair.



Symétrie demi-onde : u(t) = -u(t+T/2)

• ***Spectre de puissance d'un signal quelconque***

Il se déduit du spectre d'amplitude en élevant chaque raie au carré. La puissance totale transportée par le signal est égale à la somme des puissances de chacune de ses composantes.

Application : valeur efficace vraie d'un signal quelconque :

$$U^2_{\mathrm{AC+DC}} = U^2_{\mathrm{DC}} + U^2_{1\mathrm{eff}} + U^2_{2\mathrm{eff}} + U^2_{3\mathrm{eff}} + \ldots \quad \text{avec } U_{n\mathrm{eff}} = \frac{U_n}{\sqrt{2}}$$

Puissances

• ***Puissance instantanée*** $p(t) = u(t).i(t)$

• ***Puissance active*** $P_a = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T p(t).dt$

• ***Puissance apparente*** $S = U_{\mathrm{eff}}.I_{\mathrm{eff}}$

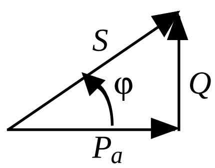
$S^2 = P_a{}^2 + Q^2$

• ***Facteur de puissance*** $F_P = \dfrac{P_a}{S}$

• ***Puissance d'un signal sinusoïdal pur***

$P_a = U_{\mathrm{eff}}.I_{\mathrm{eff}}.\cos\varphi$

$F_P = \cos\varphi$



• ***Groupement de dipôles***

Puissance d’une installation comprenant n récepteurs alimentés sous une tension U_{eff} :

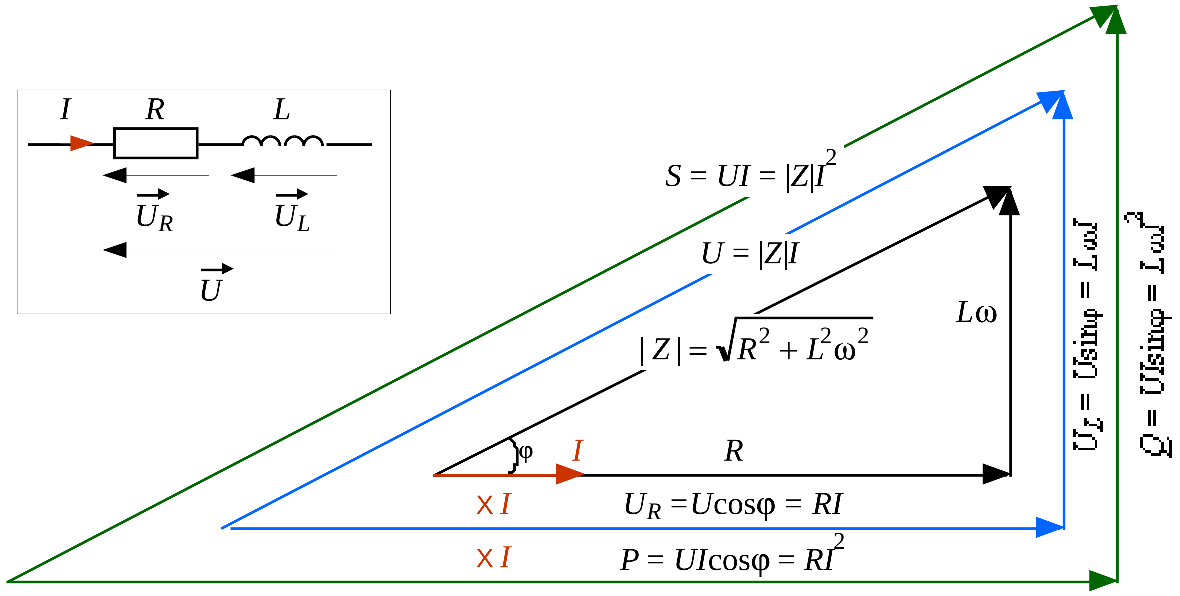
ISBN 2-9520781-0-6

$$P_a = \sum_{i=1}^{n} (P_a)_i \text{ et } Q = \sum_{i=1}^{n} Q_i \Rightarrow S = \sqrt{P_a^2 + Q^2}$$

$$\cos\varphi = P_a / S$$

$$I_{\text{eff}} = S / U_{\text{eff}}$$

• ***Triangle des Puissances en régime sinusoïdal pur*** (⚠ U_x et I exprimés en valeurs efficaces)



• ***Compensation de puissance réactive : calcul de C***

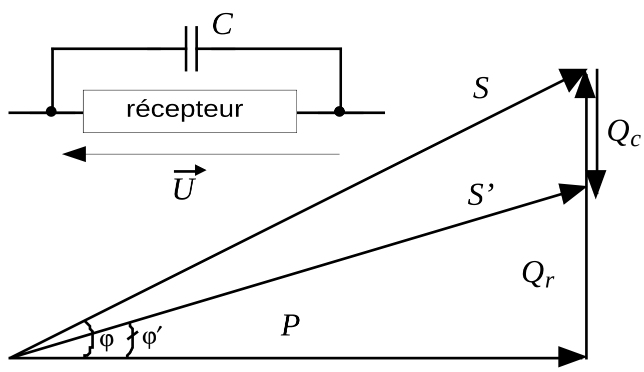
Transporter 10 kW en triphasé 400 V nécessite une intensité en ligne de $I = \dfrac{P}{\sqrt{3}U\cos\varphi}$ = 14,4 A avec cosφ = 1 et 29A avec cosφ = 0,5. Pour diminuer les pertes Joule pendant le transport d'énergie, il faut donc limiter le cosφ.

$$\tan\varphi = \frac{Q_r}{P}$$

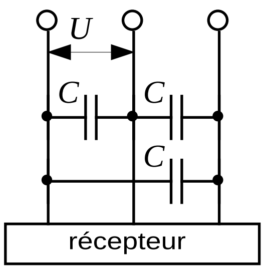
$$\tan\varphi' = \frac{Q_r - Q_c}{P}$$

$$\Rightarrow Q_c = Q_r - P\tan\varphi'$$

$$\Rightarrow C = \frac{Q_c}{U^2\omega} = \frac{P(\tan\varphi - \tan\varphi')}{U^2\omega}$$



En triphasé :



On choisit en général cos φ′ = 0,93, qui est la valeur au-delà de laquelle EDF pénalise l'abonné (facturation de la surconsommation d'énergie réactive).