B11. Numération binaire et hexadécimale

Systèmes de numération

base 10	***base 2***	***base 16***
$d_i \in \{0,1,...,9\}$	$b_i \in \{0,1\}$	$h_i \in \{0,...,9,A,B,C,D,E,F\}$
$N = \sum_{i=0}^{k} d_i.10^i$	$N = \sum_{i=0}^{k} b_i.2^i$	$N = \sum_{i=0}^{k} h_i.16^i$

Décimal	Hexadécimal	Binaire
0	0	0000
1	1	0001
2	2	0010
3	3	0011
4	4	0100
5	5	0101
6	6	0110
7	7	0111
8	8	1000
9	9	1001
10	A	1010
11	B	1011
12	C	1100
13	D	1101
14	E	1110
15	F	1111

Définition : structure d'un nombre

i : "poids" d'un chiffre :

$$N = \overset{4}{4}\overset{3}{0}\overset{2}{5}\overset{1}{9}\overset{0}{3}$$

digit de poids fort
chiffre le plus significatif
(MSB : Most Significant Bit)

digit de poids faible
chiffre le moins significatif
(LSB : Least Significant Bit)

• ***Conversions de code***

Décimal → Hexadécimal

$N \setminus 16 = N_1$ reste $h_0 \Leftrightarrow h_0 = N \bmod 16$

$N_1 \setminus 16 = N_2$ reste $h_1 \Leftrightarrow h_1 = N_1 \bmod 16$ etc…

Hexadécimal ↔ Binaire

$16 = 2^4 \Rightarrow$ à chaque digit hexadécimal correspond un quartet binaire (4 bits)

Exemple :

2523	16			
11	157	16		
B	13	9	16	
	D	9	0	
		9		

$(2523)_{10} = (9DB)_{16} = (1001.1101.1011)_2$

• ***Résolution numérique***

La précision des calculs et la résolution des mesures dépendent du nombre de bits n :

échelle :	2^n	nombre de valeurs distinctes (niveaux de quantification)
précision :	$p = \frac{1}{2^n}$	inverse de l'échelle, en valeur fractionnaire ou décimale.
dB :	$20 \log p$	Rapport signal / bruit. Augmente de 6 dB par bit supplémentaire.
% :	$100.\, p$	précision exprimée en %
ppm :	$10^6 .\, p$	précision exprimée en parties par millions
Δv :	$10 .\, p$	résolution sur une échelle 0-10 volts

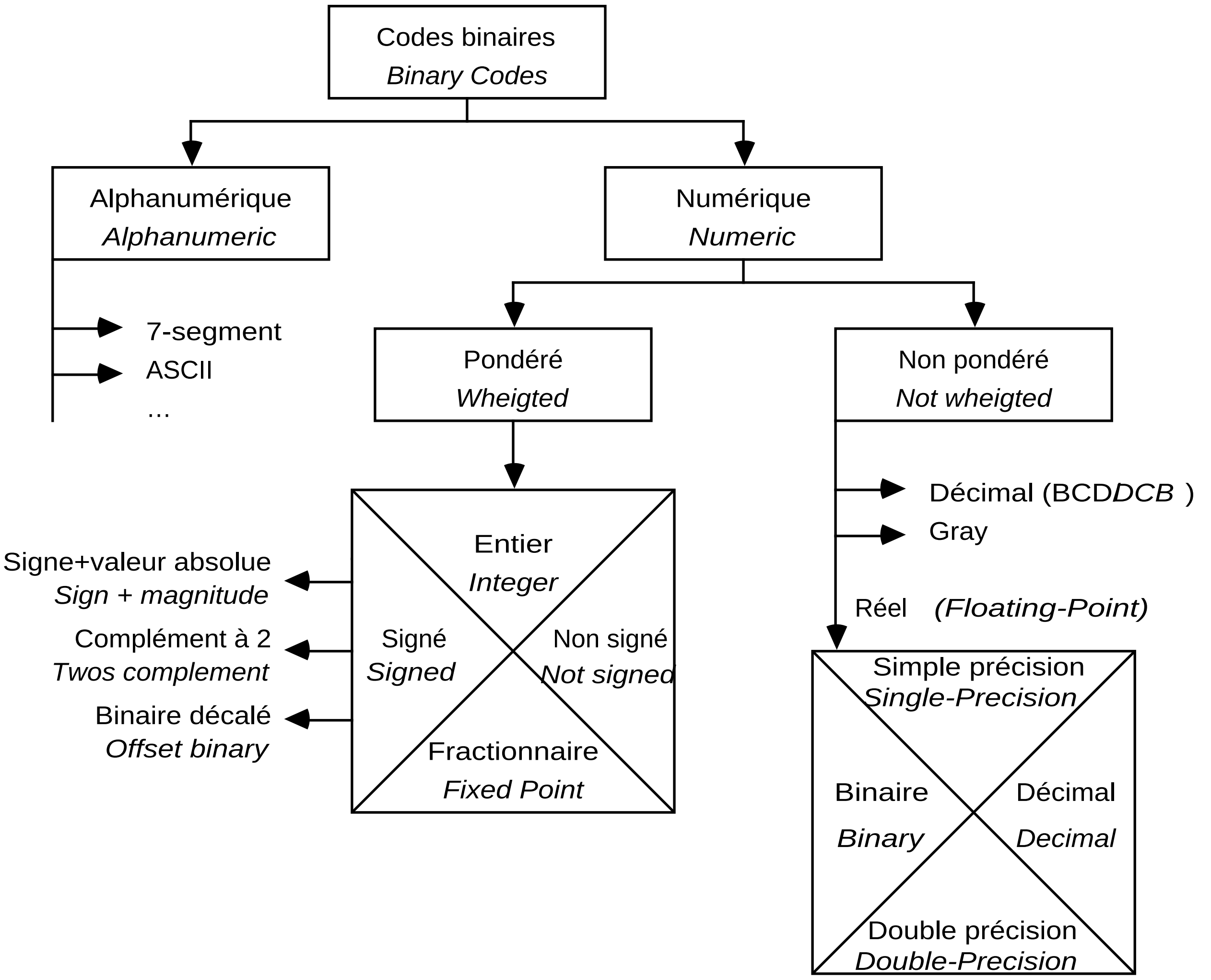
ISBN 2-9520781-0-6

n	échelle	fraction	précision	dB	%	ppm	Δv (0-10V)
1	2	1/2	5,00e-1	-6	50	500 000	5 V
2	4	1/4	2,50e-1	-12	25,0	250 000	2,5 V
3	8	1/8	1,25e-1	-18	12,5	125 000	1,25 V
4	16	1/16	6,25e-2	-24	6,2	62 500	625 mV
8	256	1/256	3,91e-3	-48	0,4	3 906	39,1 mV
12	4 096	1/4096	2,44e-4	-72	0,024	244	2,44 mV
16	65 536	1/65536	1,53e-5	-96	0,0015	15	153 µV
20	1 048 576	1/1048576	9,54e-7	-120	0,0001	1	9,5 µV

----

* * * * * * * * * * * * * * * * * * COMPLEMENTS : Codage des nombres réels * * * * * * * * * * * * * * * * *

• *Classification*



• *Code binaire fractionnaire* : pour calculs numériques en "virgule fixe". Pour 8 bits :

B(f) ≡ B(N) avec $N = 2^7.f$ $\qquad f = \sum_{i=0}^{7} b_i.2^{-i} = \dfrac{N}{2^7}$

\$00 = 0.0000000 = 0 ≤ f ≤ \$FF = 1.1111111 = 2 – 2^{-7} = 1,9921875 avec un incrément de 0.0000001 = 2^{-7} = 0,0078125

• *Codes binaires signés :*

- *Binaire décalé* (d = décalage) : pour convertisseurs A/N et N/A. Pour 8 bits :

$b_7 = 1 \Leftrightarrow n \geq 0$ $\qquad$ B(n) = B(N) avec $N = n + d$ $\qquad n = N - d = \sum_{i=0}^{7} b_i.2^i - d$

- *Signe + valeur absolue :* pour convertisseurs A/N et N/A. Pour 8 bits :

$b_7 = 0 \Rightarrow n \geq 0$ $\qquad$ B(n) = ($b_7$000 0000) OU B(|n|) $\qquad n = (-1)^{b_7} \sum_{i=0}^{6} b_i.2^i$

- *Complément à 2 :* pour calculs arithmétiques signés. Pour 8 bits :

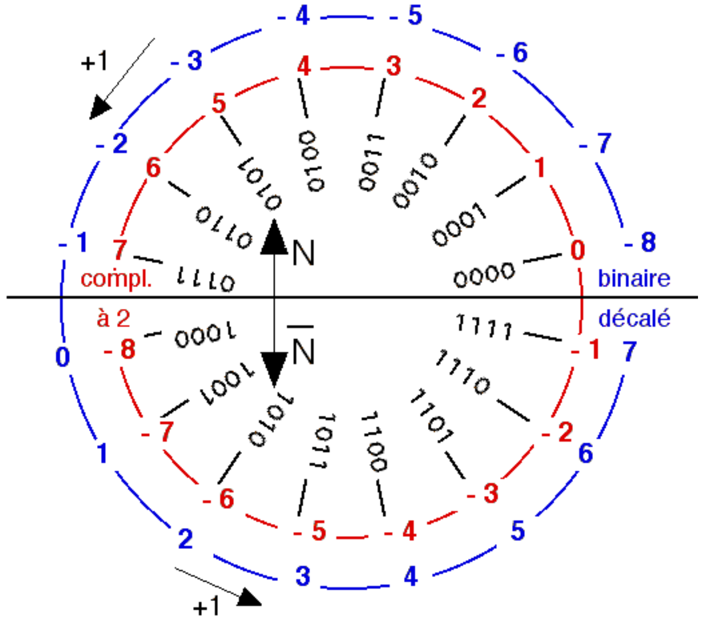
$b_7 = 0 \Leftrightarrow n \geq 0$ $\qquad$ si $n \geq 0$: B(n) ≡ B(N) $\qquad n = -2^7.b_7 + \sum_{i=0}^{6} b_i.2^i$

si $n < 0$: $B(n) = \overline{B(|n|)} + 1$

ISBN 2-9520781-0-6

entier	binaire décalé	signe + valeur absolue	complé-ment à 2
7	1111	0111	0111
6	1110	0110	0110
5	1101	0101	0101
4	1100	0100	0100
3	1011	0011	0011
2	1010	0010	0010
1	1001	0001	0001
0	1000	0000	0000
0		1000	
-1	0111	1001	1111
-2	0110	1010	1110
-3	0101	1011	1101
-4	0100	1100	1100
-5	0011	1101	1011
-6	0010	1110	1010
-7	0001	1111	1001
-8	0000		1000

Représentation circulaire :



• ***Codes non pondérés :*** DCB et Gray :

	H DCB L	Affichage
15	0001 0101	15
14	0001 0100	14
13	0001 0011	13
12	0001 0010	12
11	0001 0001	11
10	0001 0000	10
9	0000 1001	09
8	0000 1000	08
7	0000 0111	07
6	0000 0110	06
5	0000 0101	05
4	0000 0100	04
3	0000 0011	03
2	0000 0010	02
1	0000 0001	01
0	0000 0000	00

	Binaire naturel					Code Gray			
	b3	b2	b1	b0	ANGLE	g3	g2	g1	g0
15	1	1	1	1	337,5	1	0	0	0
14	1	1	1	0	315,0	1	0	0	1
13	1	1	0	1	292,5	1	0	1	1
12	1	1	0	0	270,0	1	0	1	0
11	1	0	1	1	247,5	1	1	1	0
10	1	0	1	0	225,0	1	1	1	1
9	1	0	0	1	202,5	1	1	0	1
8	1	0	0	0	180,0	1	1	0	0
7	0	1	1	1	157,5	0	1	0	0
6	0	1	1	0	135,0	0	1	0	1
5	0	1	0	1	112,5	0	1	1	1
4	0	1	0	0	90,0	0	1	1	0
3	0	0	1	1	67,5	0	0	1	0
2	0	0	1	0	45,0	0	0	1	1
1	0	0	0	1	22,5	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0,0	0	0	0	0

curseur (barette de photo-diodes)

- *Code DCB* (décimal codé binaire) *(ou "BCD")* : pour affichage des nombres décimaux. Pour 8 bits :

$$B(D) = B_H\,(d_H) : B_L(d_L) \qquad D = 10.d_H + d_L = 10.N\,(B_H) + N\,(B_L)$$

- *Code Gray* (ou "réfléchi") : pour codeurs de position angulaire (pas d'aléas de position). Pour 8 bits :

$$B(G) : \quad b_7 = g_7 \qquad\qquad G(B) : g_7 = b_7$$

$$b_i = g_7 \oplus g_6 \oplus ... \oplus g_i \qquad\qquad g_i = b_{i+1} \oplus b_i$$

ISBN 2-9520781-0-6

• ***Code en virgule flottante*** : pour calculs numériques sur des nombres réels. Soit :

$$R = \pm\, m.b^{e} \rightarrow \mathrm{B}(R) = s : e : [1] : \mathrm{f}$$

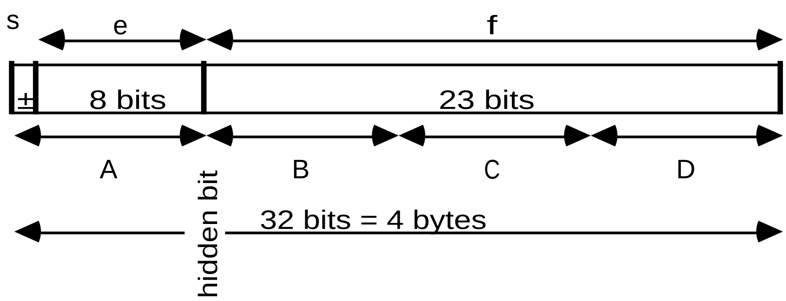
	base b = 2	*base b = 10*
s = *signe*	$s = 0$ si $R \geq 0$ $s = 1$ si $R < 0$	
$e = \lfloor \log_b \mid R \mid \rfloor$: *exposant*	e en code binaire décalé	
$m = \dfrac{\mid R \mid}{b^e}$: *mantisse*	$1 \leq m < 2 \;\Rightarrow m = 1,\mathrm{f}$ avec : 1 : bit implicite et : 0, f en code fractionnaire	$1 \leq m < 10 \Rightarrow m = d,\ldots$ avec $d = 1, 2, \ldots$ ou 9

Exemple : un nombre R au standard IEEE-754 simple précision est écrit sur 4 octets (A:B:C:D) qui comprennent :
- 1 bit de signe
- 8 bits d'exposant en binaire décalé de 127 $\Rightarrow$ $-127 \leq e \leq +128$
- 1 bit implicite "caché" *(hidden bit)*
- 23 bits pour la mantisse en code fractionnaire $\Rightarrow 0 \leq f \leq 1 - 2^{-23}$

Donc : $R_{\text{(base 2)}} = (-1)^{s} \times 1,f_{22} \ldots f_{0} \times 2^{e-127}$

Limites:

\$FFFFFFFF = $-2^{129} = -6{,}8\ 10^{38} < R <$ \$7FFFFFFF = $2^{129} = 6{,}8\ 10^{38}$, avec un incrément égal à \$00000000 = $2^{-127} = 5{,}8\ 10^{-39}$.



NB : dans ce code, le zéo n'existe pas (à cause de la présence de l'exposant). Un code spécial lui est réservé : pour cela on limite volontairement l'exposant aux valeurs e ≥ - 126 au lieu de - 127. On réserve le code particulier \$00XXXXXX au zéro.

ISBN 2-9520781-0-6