

B22 - Transformée en z

• **Théorème du retard en notation complexe**

Notations	signal analogique	signal échantillonné
représentation analytique	$v(t) = V.\sin(\omega t)$	$v(kT_e) = V.\sin(\omega kT_e)$
représentation complexe	$\underline{v}(t) = V.e^{j\omega t}$	$\underline{v}(kT_e) = V.e^{j\omega kT_e}$

$$\underline{v}[(k-1)T_e] = V.e^{j\omega(k-1)T_e} = V.e^{j\omega kT_e} . e^{-j\omega T_e} = \underline{v}(kT_e) . e^{-j\omega T_e}$$

Théorème : à un retard T_e correspond une multiplication par $e^{-j\omega T_e}$, que l'on note z^{-1}

Soit : $z = e^{j\omega T_e}$ ou, en notation de Laplace, $e^{T_e p}$

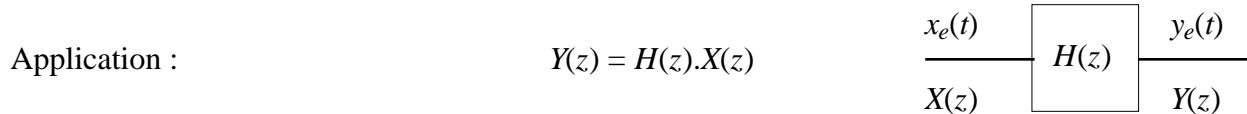
• **Transformée en z d'un signal échantillonné**

T. de Fourier d'un Dirac retardé : $\delta(t - kT_e) \xrightarrow{TF} e^{-j\omega kT_e} = z^{-k}$

T. F. d'un signal échantillonné (cf §B14) : $y_e(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} y(kT_e) . \delta(t - kT_e)$

$$\xrightarrow{TF} Y(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} y(kT_e) . z^{-k}$$

Définition de la transformée en z : $y_e(t) \xrightarrow{Z} Y(z)$



Connaissant la fonction de transfert en z d'un système numérique, on peut déterminer sa réponse à un signal d'entrée échantillonné quelconque par : $x_e(t) \rightarrow X(z) \rightarrow Y(z) \rightarrow y_e(t)$

• **Propriétés** (notation simplifiée : $y(kT_e) = y_k$)

- Linéarité : $\mathbf{Z}[y_1+y_2] = \mathbf{Z}[y_1] + \mathbf{Z}[y_2]$ et $\mathbf{Z}[ay_1] = a\mathbf{Z}[y_1]$

- Théorème du retard : $y_{k-n} \xrightarrow{Z} z^{-n} . Y(z)$

- Dérivation arrière : $y_k = \frac{x_k - x_{k-1}}{T_e} \xrightarrow{Z} Y(z) = \frac{1 - z^{-1}}{T_e} X(z)$

- Intégration simple : $y_k = y_{k-1} + T_e x_k \xrightarrow{Z} Y(z) = z^{-1} Y(z) + T_e . X(z) \Leftrightarrow Y(z) = \frac{T_e}{1 - z^{-1}} X(z)$

- Int., méthode des trapèzes : $y_k = y_{k-1} + T_e . \frac{x_k + x_{k-1}}{2} \xrightarrow{Z} Y(z) = \frac{T_e}{2} . \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}} . X(z)$

- Th. de la valeur initiale : $\lim_{k \rightarrow 0} y_k = \lim_{z \rightarrow \infty} Y(z)$

- Th. de la valeur finale : $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) Y(z)$

- Convolution (cf plus bas) : $x_k * y_k \xrightarrow{Z} X(z) . Y(z)$

• **Passage : $\underline{H}(j\omega)$ ou $H(p) \rightarrow H(z)$**

- Méthodes de calcul :

- lecture directe d'une table Transformées de Laplace \rightarrow Transformées en z

- méthode simplifiée : effectuer dans $H(p)$ les changements de variable suivants :

. dérivée (multiplication par p) :
$$p \rightarrow \frac{1 - z^{-1}}{T_e}$$

. intégrale (division par p) :
$$\frac{1}{p} \rightarrow \frac{T_e}{1 - z^{-1}}$$

. retard pur :
$$e^{-\Delta t \cdot p} \rightarrow z^{-\left\lceil \frac{\Delta t}{T_e} \right\rceil}$$

- méthode des trapèzes (plus précise) :
$$p \rightarrow \frac{2}{T_e} \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

- Cas d'un procédé réel

Dans la pratique, non seulement le signal est échantillonné, mais il est aussi bloqué. Dans la fonction de transfert globale, il faut tenir compte de l'existence du " bloqueur d'ordre zéro " (BOZ).

On sait (§B14) que la transmittance de celui-ci est : $B_0(p) = \frac{1 - e^{-T_e p}}{p}$, d'où l'on tire la règle

suivante, en notant H_B la transformée d'un système échantillonné ET bloqué, et $\mathbf{Z}[\]$ la transformée en z lue dans la table ou calculée par changement de variable : $H_B(z) = (1 - z^{-1}) \cdot \mathbf{Z}\left[\frac{H(p)}{p}\right]$

• **Passage : $H(z) \rightarrow \underline{H}(j\omega)$ ou $H(p)$**

Par changement de variable :
$$z \rightarrow e^{j\omega T_e} = \cos \omega T_e + j \sin \omega T_e$$

• **Passage : $H(z) \leftrightarrow$ équation de récurrence**

F. transfert en z :
$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{A_0 + A_1 z^{-1} + A_2 z^{-2} + \dots}{1 + B_1 z^{-1} + B_2 z^{-2} + \dots}$$

\leftrightarrow équ. aux différences : $Y(z) + B_1 z^{-1} Y(z) + B_2 z^{-2} Y(z) + \dots = A_0 X(z) + A_1 z^{-1} X(z) + A_2 z^{-2} X(z) + \dots$

\leftrightarrow équation de récurrence : $y_k = -B_1 y_{k-1} - B_2 y_{k-2} - \dots + A_0 x_k + A_1 x_{k-1} + A_2 x_{k-2} + \dots$

• **Passage : équation de récurrence $\rightarrow y_k$**

Immédiat, en calculant pas à pas la suite $\{y_k\}$ à partir de la connaissance :

- de l'équation de récurrence

- de la suite $\{x_k\}$ des échantillons d'entrée

- de la ou des conditions initiales y_0, y_1, \dots

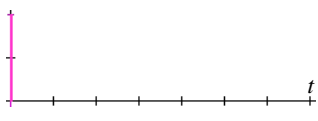
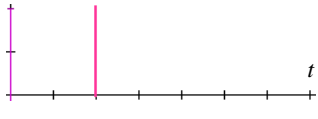
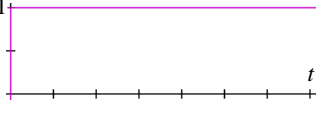
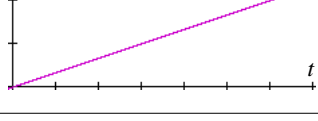
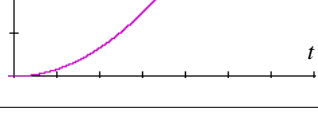
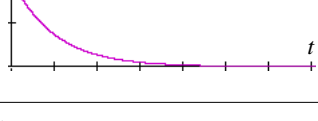
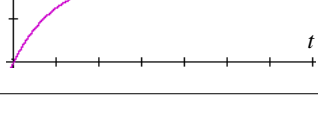
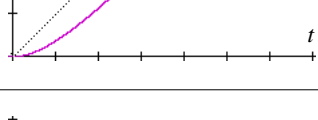
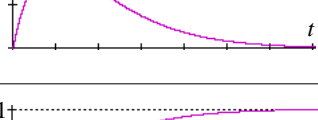
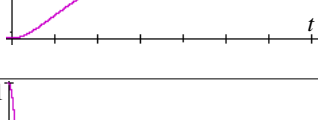
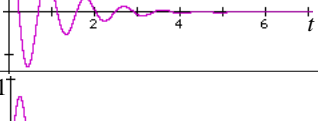
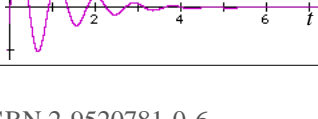
• **Passage : $H(z) \rightarrow h_k$ (réponse impulsionnelle discrète du système)**

- Par division de polynôme :
$$H(z) = \frac{N(z^{-1})}{D(z^{-1})} = h_0 + h_1 z^{-1} + h_2 z^{-2} + h_3 z^{-3} + \dots$$

- Par transformée en z inverse (lire dans une table)

- Par convolution (voir compléments).

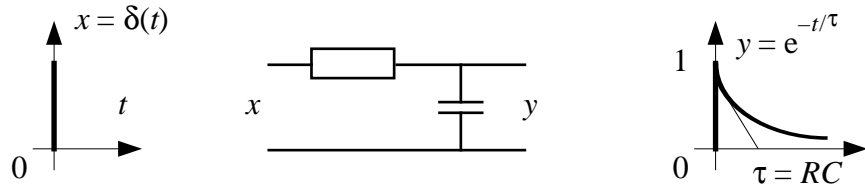
• **Passage : $h_k \rightarrow H(z)$:** par transformée de Fourier discrète (exemple : méthode utilisée ci-dessus dans le § Transformée en z d'un signal échantillonné)

signal causal	$x(t)$ [$x=0$ pour $t<0$]	$X(p)$	$X(z)$ [avec $\alpha = e^{-aT_e}$]
	$\delta(t)$	1	1
	$\delta(t - kT_e)$	$e^{-kT_e p}$	z^{-k}
	$u(t)$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$
	t	$\frac{1}{p^2}$	$\frac{T_e \cdot z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}$
	t^2	$\frac{2}{p^3}$	$\frac{T_e^2 \cdot z^{-1} (1 + z^{-1})}{(1 - z^{-1})^3}$
	e^{-at}	$\frac{1}{p + a}$	$\frac{1}{1 - \alpha \cdot z^{-1}}$
	$1 - e^{-at}$	$\frac{a}{p(p + a)}$	$\frac{(1 - \alpha)z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 - \alpha z^{-1})}$
	$at - 1 + e^{-at}$	$\frac{a^2}{p^2(p + a)}$	$\frac{aT_e z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} - \frac{(1 - \alpha)z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 - \alpha z^{-1})}$
	$t \cdot e^{-at}$	$\frac{1}{(p + a)^2}$	$\frac{T_e \alpha z^{-1}}{(1 - \alpha z^{-1})^2}$
	$1 - (1 + at)e^{-at}$	$\frac{a^2}{p(p + a)^2}$	$\frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}} - \frac{aT_e \alpha z^{-1}}{(1 - \alpha z^{-1})^2}$
	$e^{-at} \cdot \cos(bt)$ cas particulier : $a = 0$ (sinusoïde pure)	$\frac{p + a}{(p + a)^2 + b^2}$	$\frac{z^{-1}(1 - \alpha \cdot \cos(bT_e) \cdot z^{-1})}{1 - 2\alpha \cdot \cos(bT_e) \cdot z^{-1} + \alpha^2 z^{-2}}$
	$e^{-at} \cdot \sin(bt)$ cas particulier : $a = 0$ (sinusoïde pure)	$\frac{b}{(p + a)^2 + b^2}$	$\frac{\alpha \cdot \sin(bT_e) \cdot z^{-1}}{1 - 2\alpha \cdot \cos(bT_e) \cdot z^{-1} + \alpha^2 z^{-2}}$

***** **COMPLEMENTS : Convolution** *****

• Réponse impulsionnelle d'un système linéaire discret à un signal échantillonné

Rappel : la réponse impulsionnelle d'un système est sa réponse à une impulsion de Dirac. Exemple :



On suppose que le système est linéaire, et on note $h(t)$ sa réponse impulsionnelle :

- à une impulsion $\delta(t)$, le système répond par $h(t)$, par définition.
- à une impulsion $\delta(t - lT_e)$, le système répond par $h(t - lT_e)$ (par décalage de l'axe des temps de l périodes T_e)
- à une impulsion $x(lT_e).\delta(t - lT_e)$, le système répond par $x(lT_e).h(t - lT_e)$, car le système est linéaire (multiplication par une constante).

- à une somme d'impulsions $\sum_{l=-\infty}^{+\infty} x(lT_e).\delta(t - lT_e)$, le système répond par $y(t) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x(lT_e).h(t - lT_e)$, car le système est linéaire (sommation sur un ensemble de valeurs élémentaires). $y(t)$ est la réponse du système à l'entrée $x(t)$.

- aux instants définis par échantillonnage $t = kT_e$, le signal de sortie vaut : $y(k.T_e) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x(l.T_e)h(k.T_e - l.T_e)$

- soit plus simplement : $y_k = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x_l h_{k-l}$ qui est l'opération de convolution numérique. On écrit : $y = h * x$.

La suite numérique $\{h_l\}$ est appelée *réponse impulsionnelle discrète* du système échantillonné.

NB1 : pour des signaux causaux (c'est-à-dire nuls pour $t < 0$), la sommation s'étend de zéro à + l'infini.

NB2 : le produit de convolution est commutatif. Par exemple, y_k est aussi égal à $\sum_{l=0}^{+\infty} h_l x_{k-l}$.

NB3 : l'impulsion de Dirac $\delta(t)$ est l'élément neutre de cet opérateur : $y(t) * \delta(t) \equiv y(t)$

Exemple : réponse d'un circuit RC à un échelon

k	x	y	h	tau	calculs
0	1	1,000	1,000	3	$y_1 = h_1 * x_1$
1	1	1,717	0,717		$y_2 = h_1 * x_2 + h_2 * x_1$
2	1	2,230	0,513		$y_2 = h_1 * x_3 + h_2 * x_2 + h_3 * x_1$
3	1	2,598	0,368		$y_3 = h_1 * x_4 + h_2 * x_3 + h_3 * x_2 + h_4 * x_1$
4	1	2,861	0,264		$y_4 = h_1 * x_5 + h_2 * x_4 + h_3 * x_3 + h_4 * x_2 + h_5 * x_1$
5	1	3,050	0,189		$y_5 = h_1 * x_6 + h_2 * x_5 + h_3 * x_4 + h_4 * x_3 + h_5 * x_2 + h_6 * x_1$
6	1	3,186	0,135		$y_6 = \text{etc...}$
7	1	3,283	0,097		
8	1	3,283	0,069		
9	1	3,283	0,050		
10	1	3,283	0,036		
11	1	3,283	0,026		
12	1	3,283	0,018		
13	1	3,283	0,013		
14	1	3,283	0,009		
15	1	3,283	0,007		
16	1	3,283	0,005		
17	1	3,283	0,003		
18	1	3,283	0,002		
19	1	3,283	0,002		

