B23 - Filtres numériques

• *Définitions et rappels (cf § B22)*

La fonction de transfert en z d'un filtre numérique est la transformée en z de sa réponse impulsionnelle discrète : $H(z) = \mathbf{Z}[h_k]$.

Elle s'écrit :

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{A_0 + A_1 z^{-1} + A_2 z^{-2} + ... + A_{n-1} z^{-(n-1)}}{1 + B_1 z^{-1} + B_2 z^{-2} + ... + B_{m-1} z^{-(m-1)}} \ .$$

Elle correspond à l'équation de récurrence :

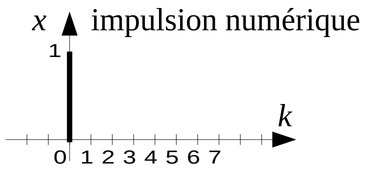
$$y_k = -B_1 y_{k-1} - B_2 y_{k-2} - ... - B_{m-1} y_{k-m+1} + A_0 x_k + A_1 x_{k-1} + A_2 x_{k-2} + ... + A_{n-1} x_{k-n+1}$$

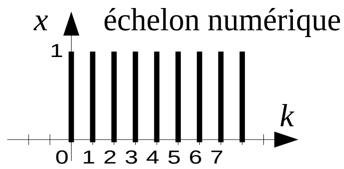
La relation entre la sortie et l'entrée s'écrit :

- dans le domaine temporel : $Y(z) = H(z).X(z)$
- dans le domaine fréquentiel : $y = h * x$ (produit de convolution numérique)

Comme en analogique, un filtre numérique est caractérisé en régime transitoire par sa réponse impulsionnelle. Mais ici, l'impulsion de Dirac est représentée par un échantillon unique d'amplitude finie égale à 1. De même que l'échelon unité est représenté par une suite d'impulsions unité :

$$\delta(k) = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$





$$u(k) = \begin{cases} 1 & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$$

NB :

	ANALOGIQUE		NUMERIQUE	
	Dirac	échelon	Dirac	échelon
énergie	finie	infinie	finie	infinie
puissance	infinie	finie	finie	finie

• *Filtres à réponse impulsionnelle finie (RIF)* (en anglais : FIR)

Si les coefficients B_i sont tous nuls (pour $i \neq 0$), la sortie à l'instant k ne dépend que de l'entrée et des n coefficients A_l (l = 0, 1, 2,...,n-1). Un tel système est encore appelé *"filtre non récursif "*.

$$y_k = A_0 x_k + A_1 x_{k-1} + A_2 x_{k-2} + ... + A_{n-1} x_{k-n+1} = \sum_{l=0}^{n-1} A_l x_{k-l} \Leftrightarrow y = A * x$$

La relation ci-dessus n'est autre que la convolution de x par la suite des n coefficients A_l . Dans le cas particulier où l'entrée x est l'impulsion de Dirac, on montre que :

$y = A * \delta = A$

car δ est l'élément neutre de l'opération de convolution (cf § B22).

Or, dans ce cas particulier, y est par définition la réponse impulsionnelle h du filtre. Donc :

$A \equiv h$, soit : $A_l = h_l$ pour l = 0, 1, 2,..., n-1

Les coefficients d'un filtre non récursif sont donc égaux aux échantillons de sa réponse impulsionnelle.

Et comme $l_{max} = n-1$, cette réponse est de durée finie.

Exemples :

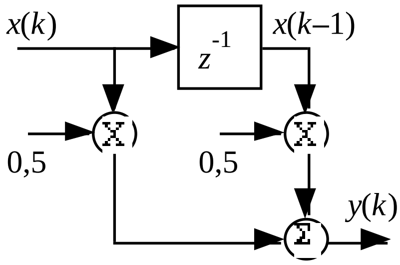
ISBN 2-9520781-0-6

- Filtre interpolateur

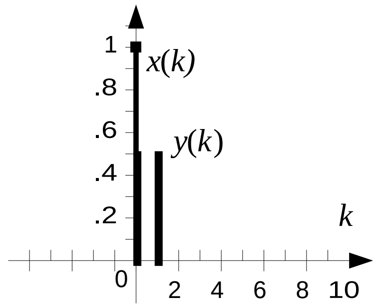
Filtre permettant d'interpoler deux échantillons successifs en calculant leur moyenne. Utile pour augmenter artificiellement la fréquence d'échantillonnage d'un signal en doublant le nombre d'échantillons.

$$y_k = \frac{x_k + x_{k-1}}{2}$$

$$H(z) = \frac{1+z^{-1}}{2}$$



k	*x*	*y*
-4	0	0
-3	0	0
-2	0	0
-1	0	0
0	1	0,5
1	0	0,5
2	0	0
3	0	0
4	0	0
5	0	0
6	0	0



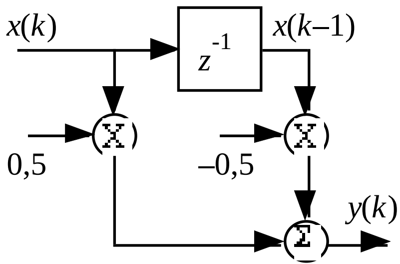
NB1 : on constate dans cet exemple que la réponse impulsionnelle est limitée à deux échantillons.

NB2 : la somme algébrique de deux mesures étendues sur une échelle [$V_{\min}$, $V_{\max}$] est comprise entre [$2V_{\min}$, $2V_{\max}$]. Il faut donc diviser par deux pour conserver une dynamique constante et des échelles homogènes entre données et résultats. Ceci justifie la présence (facultative) du facteur 1/2 dans cet exemple.

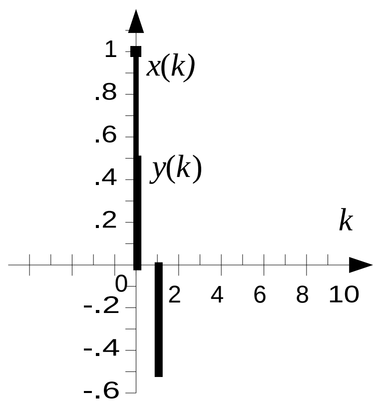
- Filtre dérivateur

$$y_k = \frac{x_k - x_{k-1}}{2}$$

$$H(z) = \frac{1-z^{-1}}{2}$$



k	*x*	*y*
-4	0	0
-3	0	0
-2	0	0
-1	0	0
0	1	0,5
1	0	-0,5
2	0	0
3	0	0
4	0	0
5	0	0
6	0	0



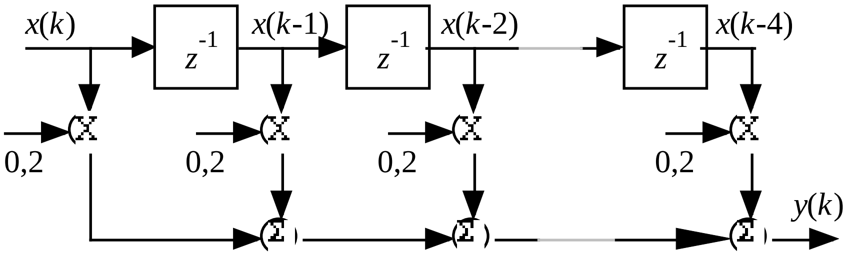
ISBN 2-9520781-0-6

- Filtre à moyenne mobile

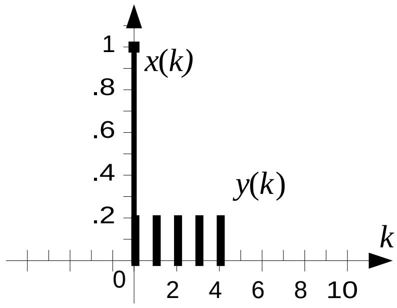
C'est l'extension à plus de deux échantillons du filtre interpolateur. Il effectue la moyenne d'une succession d'échantillons pour "lisser" le signal en éliminant les parasites et les valeurs aberrantes (exemple avec n = 5) :

$$y_k = \frac{x_k + x_{k-1} + \ldots + x_{k-(n-1)}}{n}$$

$$H(z) = \frac{1 + z^{-1} + \ldots + z^{-(n-1)}}{n}$$

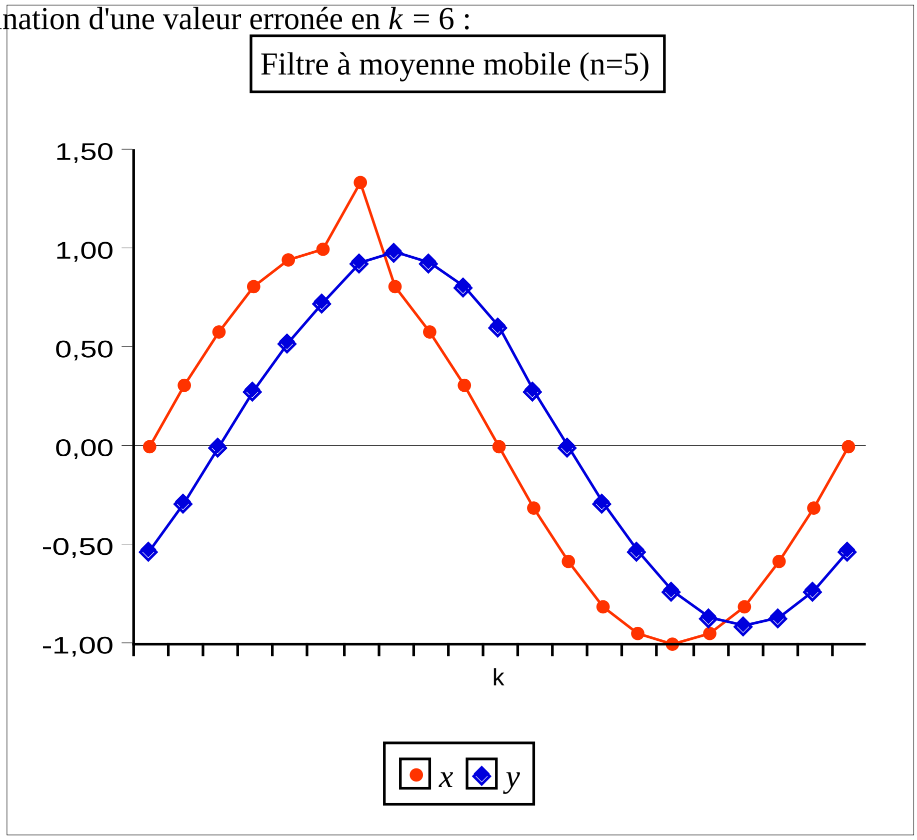


k	x	y
-4	0	0
-3	0	0
-2	0	0
-1	0	0
0	1	0,2
1	0	0,2
2	0	0,2
3	0	0,2
4	0	0,2
5	0	0
6	0	0



Exemple d'application : élimination d'une valeur erronée en k = 6 :

k	x	y
0	0,00	-0,53
1	0,31	-0,28
2	0,59	0,00
3	0,81	0,28
4	0,95	0,53
5	1,00	0,73
6	1,33	0,94
7	0,81	0,98
8	0,59	0,94
9	0,31	0,81
10	0,00	0,61
11	-0,31	0,28
12	-0,59	0,00
13	-0,81	-0,28
14	-0,95	-0,53
15	-1,00	-0,73
16	-0,95	-0,86
17	-0,81	-0,90
18	-0,59	-0,86
19	-0,31	-0,73
20	-0,00	-0,53



ISBN 2-9520781-0-6

• *Filtres à réponse impulsionnelle infinie (RII)* (en anglais : IIR)

Si les coefficients B_i ne sont pas tous nuls, l'équation aux différences est une équation de récurrence. Un tel système est encore appelé *"filtre récursif "*. Le calcul de y_k à partir de y_0 conduit à une convolution dont le nombre de termes augmente indéfiniment avec k, ce qui entraîne que la réponse impulsionnelle du filtre est infinie.

Exemple : on veut réaliser l'équivalent numérique d'un filtre passe-bas du premier ordre. Pour comparer commodément le comportement du système numérique à celui du système analogique, on examinera ici la réponse indicielle (réponse à un échelon) plutôt que la réponse impulsionnelle.

- Filtre analogique passe-bas du premier ordre :

Fonction de transfert analogique : $H(p) = \dfrac{1}{1+\tau p}$

Equation différentielle : $\tau \dfrac{dy}{dt} + y = x$

Réponse indicielle : $y = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}}$

- Simulation approchée par dérivée avant :

$$\tau \frac{y_k - y_{k-1}}{T_e} + y_{k-1} = x_{k-1} \Rightarrow \qquad y_k = \left(1 - \frac{T_e}{\tau}\right) y_{k-1} + \frac{T_e}{\tau} x_{k-1}$$

$$H(z) = \frac{\dfrac{T_e}{\tau} z^{-1}}{1 - \left(1 - \dfrac{T_e}{\tau}\right) z^{-1}}$$

- Simulation exacte par calcul de la transformée en z avec bloqueur (à l'aide d'une table) :

$$H(p) = \frac{\dfrac{1}{\tau}}{p + \dfrac{1}{\tau}} \Rightarrow \qquad H_B(z) = (1 - z^{-1}).\mathbf{Z}\left[\frac{H(p)}{p}\right] = \frac{(1-\alpha).z^{-1}}{1 - \alpha.z^{-1}}$$

avec $\alpha = e^{-\frac{T_e}{\tau}} \Rightarrow$ algorithme : $y_k = \alpha.y_{k-1} + (1-\alpha).x_{k-1}$

NB : on remarque que les coefficients de l'algorithme de calcul approché par dérivée avant sont issus du développement limité au 1er ordre de la fonction e^{-x} dans l'algorithme de calcul exact :

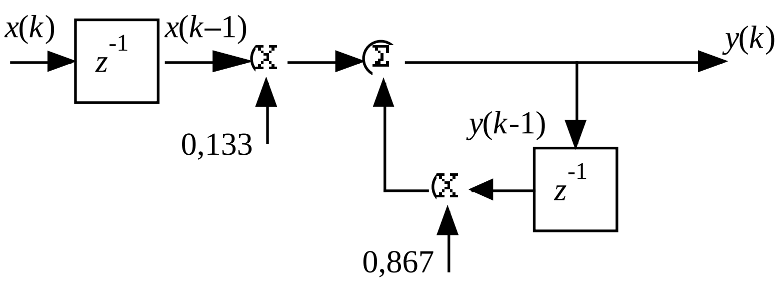
$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \Rightarrow \qquad \alpha \approx 1 - \frac{T_e}{\tau}$$

Valeurs numériques : soit par ex. $\tau = 7T_e$. On a donc : $\dfrac{T_e}{\tau} = 0{,}143$ et $\alpha = 0{,}867$.

simulation approchée :
$y_k = 0{,}857\, y_{k-1} + 0{,}143 x_{k-1}$

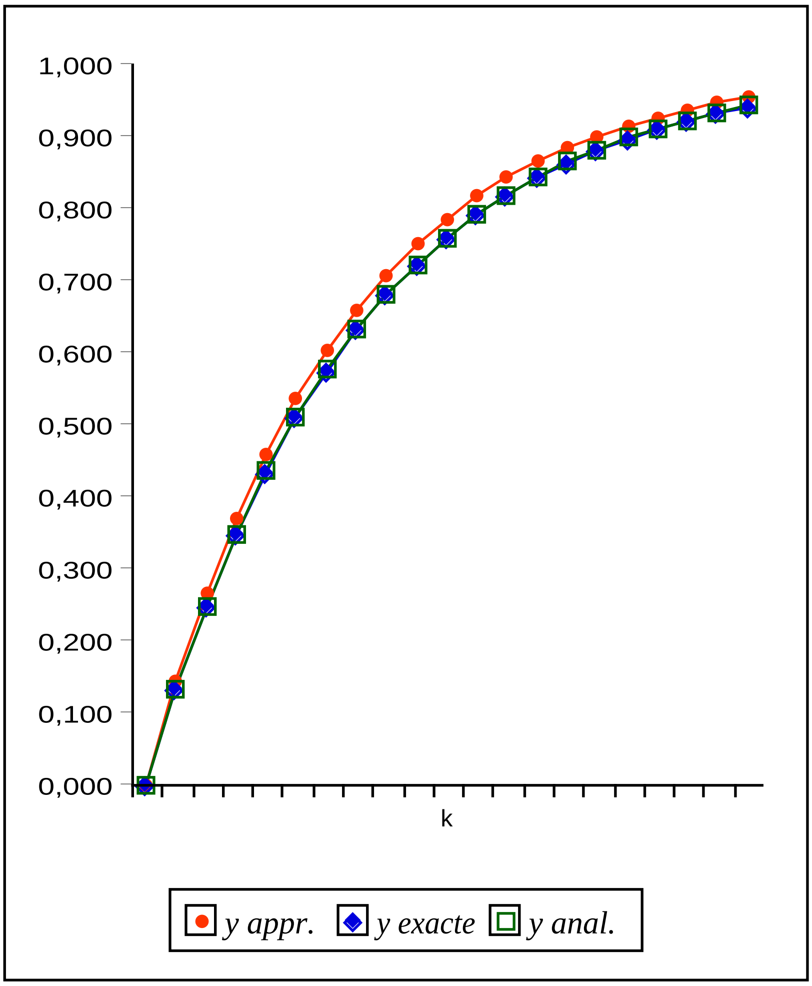
simulation exacte :
$y_k = 0{,}867\, y_{k-1} + 0{,}133 x_{k-1}$

$H_B(z) = \dfrac{0{,}133 z^{-1}}{1 - 0{,}867 z^{-1}}$



ISBN 2-9520781-0-6

k	*x*	*y appr.*	*y exacte*	*y anal.*
0	1	0,000	0,000	0,000
1	1	0,143	0,133	0,133
2	1	0,266	0,248	0,249
3	1	0,371	0,348	0,349
4	1	0,461	0,435	0,436
5	1	0,538	0,510	0,511
6	1	0,604	0,575	0,576
7	1	0,660	0,632	0,632
8	1	0,709	0,681	0,681
9	1	0,751	0,723	0,724
10	1	0,786	0,760	0,761
11	1	0,817	0,792	0,793
12	1	0,843	0,820	0,820
13	1	0,865	0,844	0,844
14	1	0,885	0,864	0,865
15	1	0,901	0,882	0,883
16	1	0,915	0,898	0,899
17	1	0,927	0,912	0,912
18	1	0,938	0,923	0,924
19	1	0,947	0,934	0,934
20	1	0,954	0,942	0,943



On constate que la réponse su système numérique avec simulation exacte suit... exactement la réponse du système analogique.

• *Stabilité des filtres*

Etant donné la transformée en z d'un filtre numérique mise sous la forme d'un produit de polynômes du premier et/ou du second ordre en z^{-1} au dénominateur :

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{A_0 + A_1 z^{-1} + A_2 z^{-2} + \ldots + A_{n-1} z^{-(n-1)}}{1 + B_1 z^{-1} + B_2 z^{-2} + \ldots + B_{m-1} z^{-(m-1)}} = \frac{N(z^{-1})}{(1-\alpha z^{-1})(1-\beta z^{-1})\ldots}$$

On appelle *pôles* de la transformée les racines du dénominateur : $z_1 = \frac{1}{\alpha}$, $z_2 = \frac{1}{\beta}$, etc . À un élément du second ordre est associé une paire de pôles imaginaires conjugués.

On montre qu'un tel système est stable si le module de **tous** les pôles est **supérieur** à 1 :

$|z_1| > 1 \Leftrightarrow |\alpha| < 1$ ET $|z_2| > 1 \Leftrightarrow |\beta| < 1$ ET ... etc

NB1 : si l'on écrit $H(z)$ sous la forme d'une fonction de z au lieu de z^{-1}, la stabilité est assurée si les pôles ont leur module **inférieur** à 1.

NB2 : on vérifie que l'intégrateur pur n'est pas stable, puisqu'il a un pôle égal à 1.

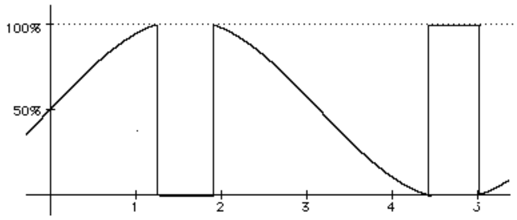
NB3 : n'ayant pas de dénominateur, *un filtre RIF est toujours stable.*

• *Saturation numérique*

La conséquence d'un dépassement de calcul *(overflow)* est une saturation numérique, phénomène nettement plus critique qu'une simple saturation analogique.

ISBN 2-9520781-0-6

Exemple : en virgule fixe (cas de la majorité des processeurs DSP), sur 16 bits, dépasser le code \$FFFF = 65535) de une unité revient à générer le nombre \$FFFF + 1 = \$10000, où 1 est une retenue qui n'est pas prise en compte dans le calcul (17ème bit). Il reste le nombre \$0000 = 0. Ce (faible) dépassement d'une seule unité revient à annuler brusquement le signal ! De même, \$0000 – 1 = \$1FFFF (en complément à 2), ce qui sature immédiatement le signal à sa valeur maximale (\$FFFF) :



Il est donc essentiel de s'assurer qu'à aucune étape du calcul un résultat intermédiaire ne dépasse les limites permises. La dynamique permise (rapport entre le plus grand signal et le plus petit) dépend du nombre de bits :

Un calcul en virgule fixe sur 16 bits permet une dynamique de : 20 log 2^{16} = 96 dB

Un calcul en virgule fixe sur 32 bits permet une dynamique de : 20 log 2^{32} = 192 dB

• *Fonction de transfert des filtres RIF*

- *Filtre interpolateur*

Algorithme : $$y_k = \frac{x_k + x_{k-1}}{2}$$

Fonction de transfert : elle s'obtient en substituant $e^{-j\omega T_e}$ à z^{-1} dans l'expression de $H(z)$:

$$H(j\omega) = \frac{1+e^{-j\omega T_e}}{2}$$

Gain en dB : comme $\frac{1}{2}\left(1+e^{-j\alpha}\right) = e^{-j\frac{\alpha}{2}}.\frac{e^{j\frac{\alpha}{2}}+e^{-j\frac{\alpha}{2}}}{2} = e^{j\left(-\frac{\alpha}{2}\right)}.\cos\frac{\alpha}{2}$, il vient :

$$G = 20\log\left|\cos\pi\frac{f}{F_e}\right|$$

Cette fonction est périodique, mais n'a de sens que pour $f < F_e/2$. La fréquence de coupure f_c à –3dB est telle que $\cos\pi\frac{f}{F_e} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow f_c = \frac{F_e}{4}$

- *Filtre dérivateur*

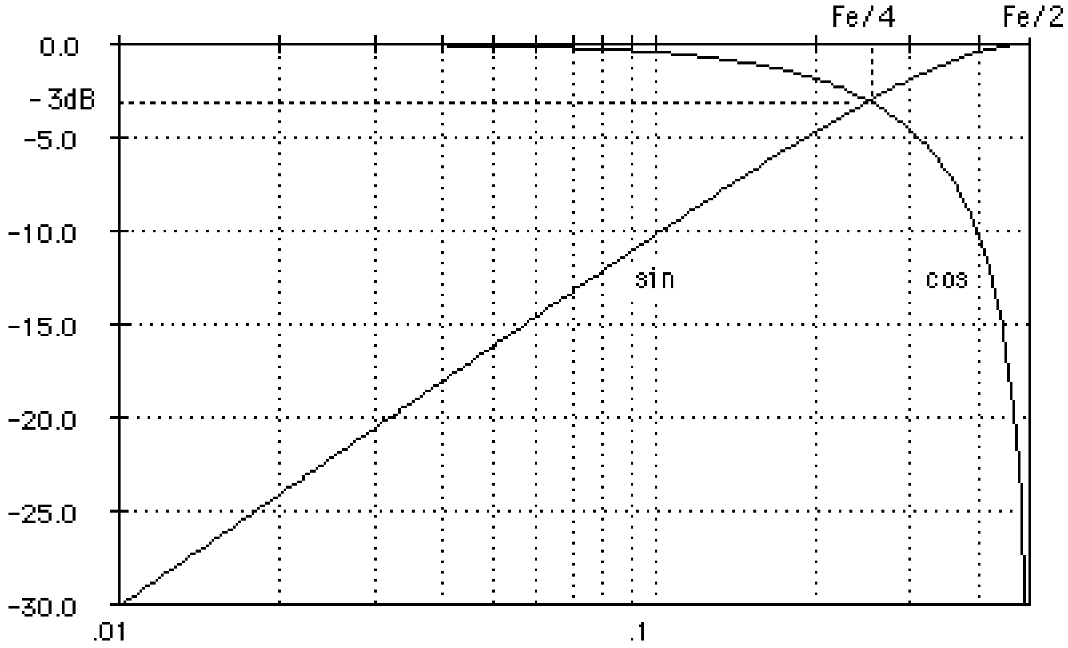
Algorithme : $$y_k = \frac{x_k - x_{k-1}}{2}$$

Fonction de transfert : $$H(j\omega) = \frac{1-e^{-j\omega T_e}}{2}$$

Gain : comme $\frac{1}{2}\left(1-e^{-j\alpha}\right) = je^{-j\frac{\alpha}{2}}.\frac{e^{j\frac{\alpha}{2}}-e^{-j\frac{\alpha}{2}}}{2j} = e^{j\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)}.\sin\frac{\alpha}{2}$, il vient :

$$G = 20\log\left|\sin\pi\frac{f}{F_e}\right| \quad , \quad f < F_e/2 \quad , \quad f_c = F_e/4$$

ISBN 2-9520781-0-6

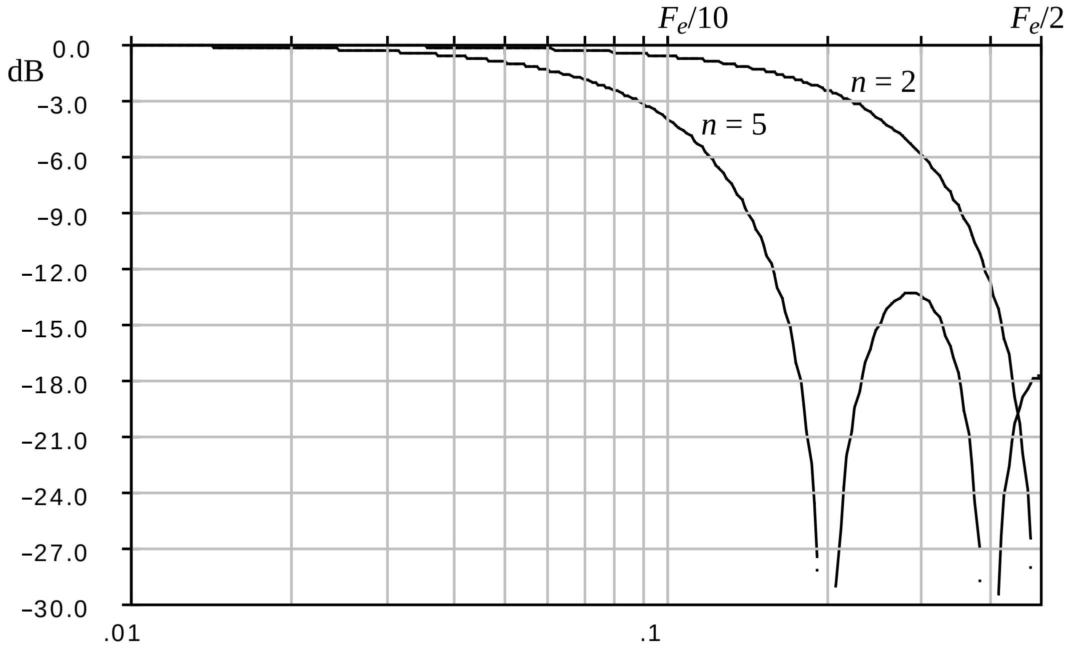


Filtre à moyenne mobile

La fonction de transfert de ce filtre est une série de Fourier. Pour calculer celle-ci, une méthode consiste à remarquer qu'elle est égale à la transformée de Fourier de sa réponse impulsionnelle *h*, soit, en module, d'après les tables de transformées de Fourier :

T.F. de la fonction $\frac{1}{a}\prod_a(t) = \frac{\sin \pi f a}{\pi f a} \Rightarrow \left|H(j\omega)\right| = \left|\frac{\sin \pi n \frac{f}{F_e}}{\pi n \frac{f}{F_e}}\right|$

cas $n = 5$:



NB : pour $n = 2$, on retrouve la réponse de l'interpolateur.

• Fonction de transfert des filtres RII

Valeurs numériques : soit F_e = 10 kHz ⇔ T_e = 100 µs ; τ = 7T_e = 700 µs soit une fréquence de coupure analogique de 1/2πτ = 227 Hz.

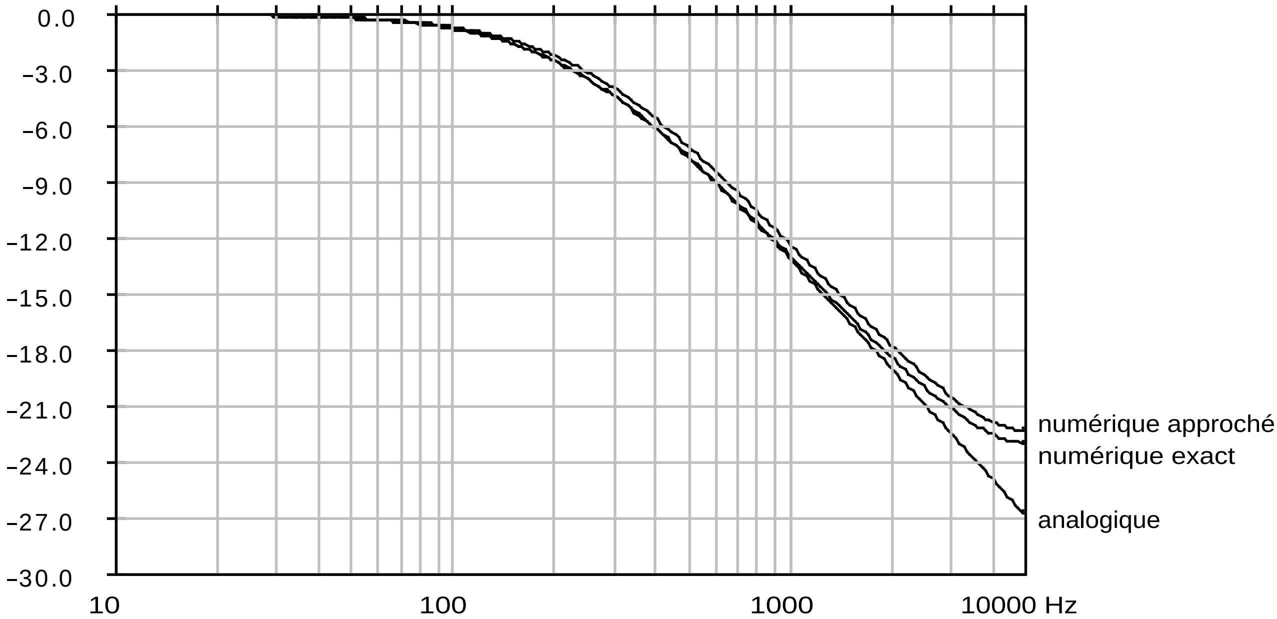
Algorithme : $y_k = \alpha . y_{k-1} + (1-\alpha).x_{k-1}$ avec $\alpha = e^{-\frac{T_e}{\tau}}$ (simulation exacte) ou $\alpha = 1 - \frac{T_e}{\tau}$ (simulation approchée par dérivée avant).

Fonction de transfert en z : $H_B(z) = \dfrac{(1-\alpha).z^{-1}}{1-\alpha.z^{-1}}$

Fonction de transfert en jω : $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{1-\alpha}{e^{j\omega T_e} - \alpha} = \dfrac{1-\alpha}{\cos\omega T_e - \alpha + j\sin\omega T_e}$

Fréquence de coupure à - 3dB : pour $\left|\underline{H}(j\omega)\right| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ le calcul aboutit à :

$f_c = \dfrac{F_e}{2\pi}\arccos\dfrac{-\alpha^2 + 4\alpha - 1}{2\alpha}$ = 227 Hz exactement (246 Hz par la méthode approchée), avec les valeurs numériques précédentes.



• Retard de groupe et déphasage

Il faut tenir compte dans un système de traitement numérique du signal de la durée de conversion du CAN et du temps d'exécution des calculs avant restitution du signal par le CNA. L'ensemble revient à introduire un *retard de groupe* Δ*t* fixe, qui ne dépend que des performances en rapidité de calcul du système numérique. Ce retard constant Δ*t* a pour conséquence qu'une fonction sinusoïdale est telle que :

$$y = A\sin(\omega t + \Delta\varphi) = A\sin\left[\omega\left(t + \frac{\Delta\varphi}{\omega}\right)\right] = A\sin\left[\omega\left(t + \Delta t\right)\right]$$

- Pour les filtres RIF, il en découle un retard de phase linéaire $\Delta\varphi = \omega.\Delta t = 2\pi f \Delta t$ proportionnel à la fréquence (aussi parle-t-on de filtres à phase linéaire).

- Pour les filtres RII, les propriétés de phase d'un filtre numérique diffèrent des propriétés de son homologue analogique. Ce qui introduit un risque d'instabilité, *même au premier ordre,* car Δφ peut dépasser 180°.

ISBN 2-9520781-0-6

* * * * * * * * * * * * * * * * * **COMPLEMENTS** *

• Correcteurs numériques

- Correcteurs simples, forme approchée

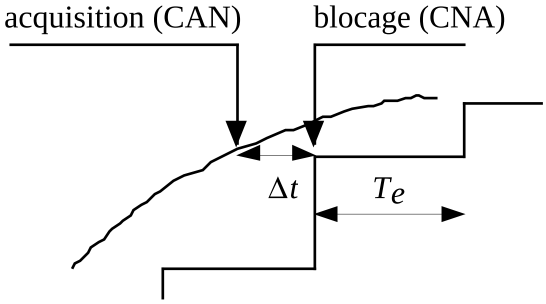
Type	$C(p) = \dfrac{Y(p)}{X(p)}$	$C(z) = \mathbf{Z}[C(p)] = \dfrac{Y(z)}{X(z)}$	Equation de récurrence
P	K	K	$y_k = K\,x_k$
I	$\dfrac{1}{T_i p}$	$\dfrac{T_e}{T_i}\dfrac{1}{1-z^{-1}}$	$y_k = \dfrac{T_e}{T_i}x_k + y_{k-1}$
D	$T_d\,p$	$\dfrac{T_d}{T_e}(1-z^{-1})$	$y_k = \dfrac{T_d}{T_e}(x_k - x_{k-1})$
PI	$K\left(1+\dfrac{1}{T_i p}\right)$	$K\left(1+\dfrac{T_e}{T_i}\dfrac{1}{1-z^{-1}}\right)$	$y_k = K\left(1+\dfrac{T_e}{T_i}\right)x_k - Kx_{k-1} + y_{k-1}$
PID	$K\left(1+\dfrac{1}{T_i p}+T_d\,p\right)$	$K\left(1+\dfrac{T_e}{T_i}\dfrac{1}{1-z^{-1}}+\dfrac{T_d}{T_e}(1-z^{-1})\right)$	$y_k = K\left(1+\dfrac{T_e}{T_i}+\dfrac{T_d}{T_e}\right)x_k - K\left(1+\dfrac{T_d}{T_e}\right)x_{k-1} + y_{k-1}$

- Correcteurs réels, forme exacte avec bloqueur

La forme discrète d'un système continu est donnée par la transformée en z de sa fonction de transfert associée au bloqueur d'ordre 0 : $C_B(z) = (1-z^{-1})\,\mathbf{Z}\left[\dfrac{C(p)}{p}\right] = \dfrac{Y(z)}{X(z)}$. En appliquant cette dernière relation, on trouve des équations de récurrence sous une forme légèrement différente des précédentes, qui s'appliquent au cas où, dans un système, seul le correcteur est discret. Sinon, il faut noter que le BOZ s'applique à toute la chaîne en boucle ouverte, dont la fonction de transfert est égale à $B_0(p).C(p).H(p)$ si la chaîne est à retour unitaire.

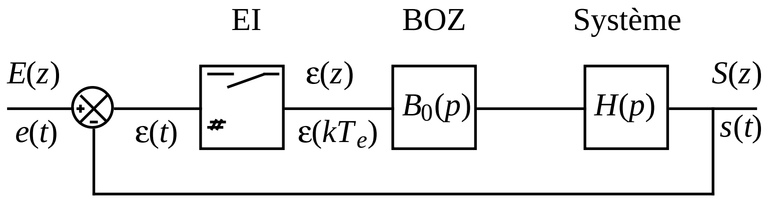
- Retard de groupe

(cf aussi §B23) L'échantillonnage n'est jamais instantané. Il faut tenir compte dans un système de traitement numérique du signal de la durée de conversion du CAN et du temps d'exécution des calculs avant restitution du signal par le CNA. L'ensemble revient à introduire un *retard de groupe :*



En boucle fermée, ce retard introduit une différence notable entre résultats théoriques et résultats expérimentaux ! Dans la pratique, si l'on choisit une période d'échantillonnage telle que la durée d'acquisition et de traitement soit de quelques % de T_e *on pourra considérer que l'échantillonnage est instantané.*

• *Exemple I : système à retour unitaire non corrigé avec erreur échantillonnée*



- EI : échantillonneur instantané de période T_e. Pratiquement, on suppose que le temps d'acquisition du signal (temps de conversion du CAN + temps de traitement par le système numérique) est très inférieur à la période d'échantillonnage T_e (retard de groupe négligeable).
- Transformée de Laplace du système : $H(p) = \dfrac{K}{1+\tau p}$
- Transformée de Laplace du BOZ : $B_0(p) = \dfrac{1-e^{-pT_e}}{p}$
- Transformée de Laplace de la chaine directe : $H_B(p) = B_0(p).H(p) = (1-e^{-pT_e}).\dfrac{H(p)}{p}$
- Soit $\alpha = e^{-\frac{T_e}{\tau}}$ (NB : $\alpha < 1$)
- Transformée en z de la chaîne directe : $H_B(z) = \mathbf{Z}\left[H_B(p)\right] = (1-z^{-1}).\mathbf{Z}\left[\dfrac{H(p)}{p}\right] = \dfrac{K(1-\alpha)z^{-1}}{1-\alpha z^{-1}}$
- Transformée en z du système en boucle fermée : $F(z) = \dfrac{H_B(z)}{1+H_B(z)} = \dfrac{K(1-\alpha)z^{-1}}{1-\left(\alpha - K(1-\alpha)\right)z^{-1}}$
- Condition de stabilité (module de la racine du dénominateur inférieur à 1) : $\left|\alpha - K(1-\alpha)\right| < 1 \Rightarrow -1 < K < \dfrac{1+\alpha}{1-\alpha}$
- Signal d'entrée : échelon d'amplitude E_0, soit : $e(t) = E_0\ u(t)$
- Transformée en z du signal d'entrée *(cf tables)* : $E(z) = \dfrac{E_0}{1-z^{-1}}$
- Transformée en z du signal de sortie, obtenu après décomposition en fractions rationnelles *(cf cours de Maths !)* :

$$S(z) = E(z).F(z) = \frac{K.E_0}{1+K}\left[\frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1}{1-\left(\alpha - K(1-\alpha)\right)z^{-1}}\right]$$

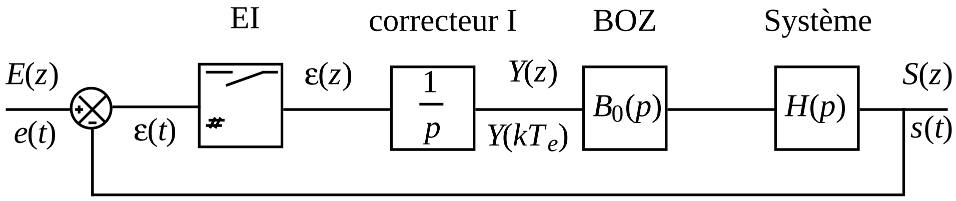
- On pose : $\lambda = \alpha - K(1-\alpha)$. D'après la table séquences-transformées en z, il vient :
- Signal de sortie : $s_k = s(kT_e) = \dfrac{K.E_0}{1+K}.\left(1-\lambda^k\right).u_k$
- Réponse apériodique *(cf cours Maths !)* : $0 < \lambda < 1 \Leftrightarrow -1 < K < \dfrac{\alpha}{1-\alpha}$. D'après le théorème de la valeur finale :

$\lim_{k\to\infty} s_k = \dfrac{K.E_0}{1+K}$ et $\lim_{k\to\infty} \varepsilon_k = \dfrac{E_0}{1+K}$

- Réponse oscillatoire amortie : $-1 < \lambda < 0 \Leftrightarrow \dfrac{\alpha}{1-\alpha} < K < \dfrac{1+\alpha}{1-\alpha}$. Mêmes limites.
- Réponse oscillatoire divergente : $\lambda < -1 \Leftrightarrow K > \dfrac{1+\alpha}{1-\alpha}$: le système sature

ISBN 2-9520781-0-6

• *Exemple II : système à retour unitaire corrigé*



- Transformée en z du correcteur : $C(z) = \mathbf{Z}\left(\dfrac{1}{p}\right) = \dfrac{1}{1-z^{-1}}$
- Relation de récurrence : $C(z) = \dfrac{Y(z)}{\varepsilon(z)} \Rightarrow Y(z) - z^{-1}.Y(z) = \varepsilon(z) \Rightarrow y_k = \varepsilon_k + y_{k-1}$
- Transformée en z de la chaîne directe : $H_B(z) = \dfrac{K(1-\alpha)\,z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-\alpha z^{-1})}$
- Transformée en z en boucle fermée :

$$F(z) = \frac{K(1-\alpha)\,z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-\alpha z^{-1}) + K(1-\alpha)z^{-1}} = \frac{K(1-\alpha)\,z^{-1}}{1-\big((1+\alpha)-K(1-\alpha)\big)z^{-1} + \alpha z^{-2}}$$

- On applique comme ci-dessus un échelon unité d'amplitude E_0. Comme $S(z) = E(z).F(z)$:

$$S(z) = E_0.\left[\frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1-\alpha z^{-1}}{1-\big((1+\alpha)-K(1-\alpha)\big)z^{-1} + \alpha z^{-2}}\right]$$

- Le filtre est stable si le module des racines du polynôme $P(z) = \; z^2 - \big((1+\alpha)-K(1-\alpha)\big)z + \alpha$ est inférieur à 1,

ce qui conduit, après un calcul assez lourd, à la condition $0 < K < 2\dfrac{1+\alpha}{1-\alpha}$. Alors $\lim_{k\to\infty} s(kT_e) = E_0\, u(kT_e)$ et $\lim_{k\to\infty} \varepsilon(kT_e) = 0$. Sinon , $s(kTe)$ diverge et $\varepsilon(kTe) \to \infty$. On peut aussi appliquer le *critère de Jury* au second ordre : le système est stable si le dénominateur satisfait aux deux conditions suivantes :

Polynôme $P(z) = Az^2 + Bz + C$, avec $A > 0$
1) $|C| < A$ ou $C - A < 0$
2) $P(1) > 0$ et $P(-1) > 0$, soit : $A + B + C > 0$ et $A - B + C > 0$

- Enfin, la réponse est apériodique si les pôles de $P(z)$ sont réels > 1, soit $0 < K < \dfrac{1-\sqrt{\alpha}}{1+\sqrt{\alpha}}$.

ISBN 2-9520781-0-6